

WERKLE, H. (1988): Steifigkeit und Dämpfung von Fundamenten auf inhomogenem Baugrund. — In: Steinwachs, M. (Hrsg.): Ausbreitung von Erschütterungen im Boden und Bauwerk. — 3. Jtg. DGEB, Trans Tech Publications, Clausthal.

* Hannover, 1988

Steifigkeit und Dämpfung von Fundamenten auf inhomogenem Baugrund

HORST WERKLE

1. Einleitung

Bei der Schwingungsberechnung von Gebäuden und Maschinenfundamenten wird der Baugrund meist durch Federn und Dämpfer abgebildet, deren Kennwerte man aus der dynamischen Steifigkeit eines starren Kreisfundaments auf einem homogenen elastischen Halbraum ableitet. Für diesen einfachen Fall sind nämlich die dynamischen Steifigkeiten aus zahlreichen Veröffentlichungen bekannt (z.B. BYCROFT 1956, VELETSOS & WEI 1971, SHAH 1968). Ihre Anwendung in der Praxis ist aber nicht problemlos, denn der Baugrund ist nur selten homogen. Die Steifigkeit von rolligen und bindigen Böden nimmt in der Regel mit der vertikalen Auflast und somit mit der Tiefe zu.

Lösungen für die dynamischen Federsteifigkeiten existieren für bestimmte Inhomogenitäten des Bodens. So wurden z.B. einige Ergebnisse für eine homogene Bodenschicht über einem starren bzw. elastischen Halbraum von BYCROFT (1956), KAUSEL et. al. (1975, 1978), KOBORI et al. (1966) und LUCO (1974, 1976) veröffentlicht. Mehrere Fälle für eine Bodenschicht, in der die Scherwellengeschwindigkeit mit der Tiefe linear zunimmt, wurden von WONG & LUCO (1985) untersucht. Allgemein gültige quantitative Angaben über den Einfluß einer kontinuierlichen Steifigkeitszunahme mit der Tiefe gibt es bisher nicht.

In der Praxis behilft man sich häufig mit der Verwendung eines "repräsentativen" Schubmoduls, den man in die Formeln und Impedanzfunktionen für ein Fundament auf einem homogenen Halbraum einsetzt. Zu diesem Zweck wird der Schubmodul des Bodens in einer "repräsentativen" Tiefe unter dem Fundament, z.B. in der Tiefe einer halben Fundamentbreite gewählt und meist wird derselbe Schubmodul für alle Freiheitsgrade verwendet.

Ein verbessertes Verfahren zur Bestimmung der statischen Federsteifigkeiten hat HOLZLÖHNER (1979) vorgeschlagen. Der repräsentative Schubmodul wird danach für die verschiedenen Freiheitsgrade eines Fundaments durch gewichtete Mittelung des Schubmoduls über die Tiefe errechnet. Als Wichtungsfaktor empfiehlt er den relativen Beitrag des jeweiligen Tiefenintervalls zur statischen Gesamtverschiebung des Fundaments. Den relativen Verschiebungsbeitrag schätzt er ab über die Differenz zwischen den Steifigkeiten für Fundamente auf unterschiedlich dicken Bodenschichten, z.B. nach KOBORI et

al. (1966) oder LUCO (1974). HOLZLÖHNER weist wie zuvor schon HADJIAN & LUCO (1977) darauf hin, daß für die verschiedenen Freiheitsgrade unterschiedliche repräsentative Werte des Schubmoduls verwendet werden sollten und daß die Abstrahlungsdämpfung überschätzt wird, wenn man den repräsentativen Schubmodul zur Bestimmung der statischen Steifigkeit auch zur Berechnung der Dämpfung mit Hilfe der dynamischen Steifigkeitsfunktionen für den homogenen Halbraum verwendet. Dies wird auch durch Versuche bestätigt (TSAI 1981).

Im folgenden werden Ergebnisse für die statische und dynamische Steifigkeit eines Kreisfundaments auf einer dicken inhomogenen Bodenschicht dargestellt, in der der Schubmodul von einem Anfangswert an der Oberfläche linear mit der Tiefe zunimmt. Eine dicke Bodenschicht statt eines Halbraums wurde aus berechnungstechnischen Gründen gewählt. Hinsichtlich der praktischen Ergebnisse ist die Auswirkung der begrenzten Tiefe des Bodens unerheblich, wenn die Schicht ausreichend dick gewählt wird. Die Berechnungsergebnisse lassen sich näherungsweise als "repräsentative Tiefen" darstellen, wobei diese allerdings vom angeregten Freiheitsgrad und der Frequenz der Schwingung abhängen. Diese Darstellung wird gegenüber einer tabellarischen Darstellung wegen ihrer größeren Anschaulichkeit vorgezogen.

2. Berechnungsverfahren und Bodenmodell

Zur Berechnung wird der Boden als ein in horizontaler Richtung unbegrenztes viskoelastisches Kontinuum aufgefaßt. In vertikaler Richtung ist der Boden beliebig geschichtet und durch einen unteren starren Rand begrenzt. Das verwendete semifinite Berechnungsverfahren beruht auf Lösungsansätzen für die Verschiebungen, die in horizontaler Richtung die Differentialgleichung des viskoelastischen Kontinuums erfüllen. In vertikaler Richtung werden die Verschiebungen durch stückweise lineare Funktionen approximiert. Mittels expliziter Lösungen für die Verschiebungen, die von Punkt-, Ring- und Kreisflächenlasten erzeugt werden, kann die dynamische Steifigkeit für beliebig geformte Fundamente berechnet werden (WAAS et al. 1985).

Die Zunahme des Schubmoduls G mit der Tiefe Z wird beschrieben durch

$$G(Z) = G_0 (1 + \alpha \cdot Z/R) \quad (1)$$

wobei G_0 der Schubmodul an der Bodenoberfläche, R der Radius des Kreisfundaments und α der Gradient bedeuten. Das untersuchte Bodenmodell hat eine Schichtdicke von insgesamt $10 \cdot R$. Seine Diskretisierung ist in Abb. 1 dargestellt.

Die mit diesem Modell für ein starres Kreisfundament auf einer homogenen elastischen Schicht ($\alpha = 0$) ermittelten Federkonstanten stimmen gut mit denen eines homogenen Halbraums überein. Die Abweichungen betragen weniger als 5% für Kipp-, Torsion- und Horizontalbewegung und 12% für Vertikalbewegung. Auch die dynamischen Steifigkeits- und Dämpfungsbeiwerte entsprechen denjenigen eines homogenen Halbraums (WAAS & WERKLE 1984).

Die Parameterstudie wurde für die Beiwerte $\alpha = 0; 1; 2$, die Poissonzahlen $\nu = 0.2; 0.33; 0.45$ und eine innere Bodendämpfung von $D=5\%$ durchgeführt.

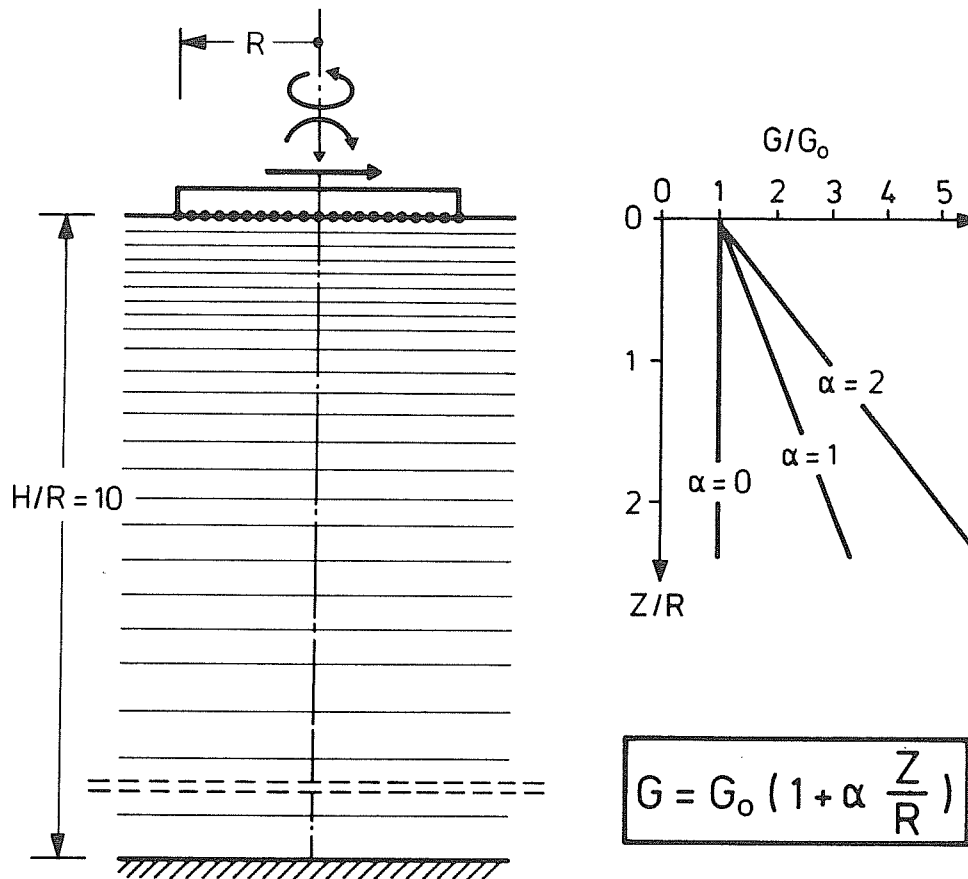


Abb. 1: Bodenmodell

3. Statische Steifigkeit

Die statischen Steifigkeiten des inhomogenen Bodens lassen sich durch diejenigen des homogenen Halbraums ausdrücken zu

$$\frac{4 \bar{G} R}{1-\nu} \quad \text{Vertikalverschiebung} \quad (2a)$$

$$\frac{8 \bar{G} R}{2-\nu} \quad \text{Horizontalverschiebung} \quad (2b)$$

$$\frac{8 \bar{G} R^3}{3(1-\nu)} \quad \text{Kippen} \quad (2c)$$

$$\frac{16 \bar{G} R^3}{3} \quad \text{Torsion} \quad (2d)$$

Für jeden Freiheitsgrad wird ein äquivalenter Schubmodul

$$\bar{G} = G_0 (1 + \alpha \cdot \zeta) \quad (3)$$

gewählt, der nach Gl. (1) einer repräsentativen Tiefe $\bar{z} = \zeta \cdot R$ entspricht. Gegenüber einem homogenen Halbraum mit der Steifigkeit G_0 ist die statische Steifigkeit um den Wert $(1 + \alpha \cdot \zeta)$ vergrößert. Die mit dem semifiniten Ver-

fahren ermittelten Vergrößerungsfunktionen sind in Abb. 2 in Abhängigkeit von α und ν angegeben. (Die Funktionen für "Horizontalverschiebung" und "Torsion" sind unabhängig von ν .) Linearisiert man diese Funktionen, so erhält man für jeden Freiheitsgrad einen von α und ν unabhängigen Beiwert ξ :

$$\xi = \begin{array}{l} 1.0 \text{ Vertikalverschiebung} \\ 0.5 \text{ Horizontalverschiebung} \\ 0.4 \text{ Kippen} \\ 0.2 \text{ Torsion} \end{array}$$

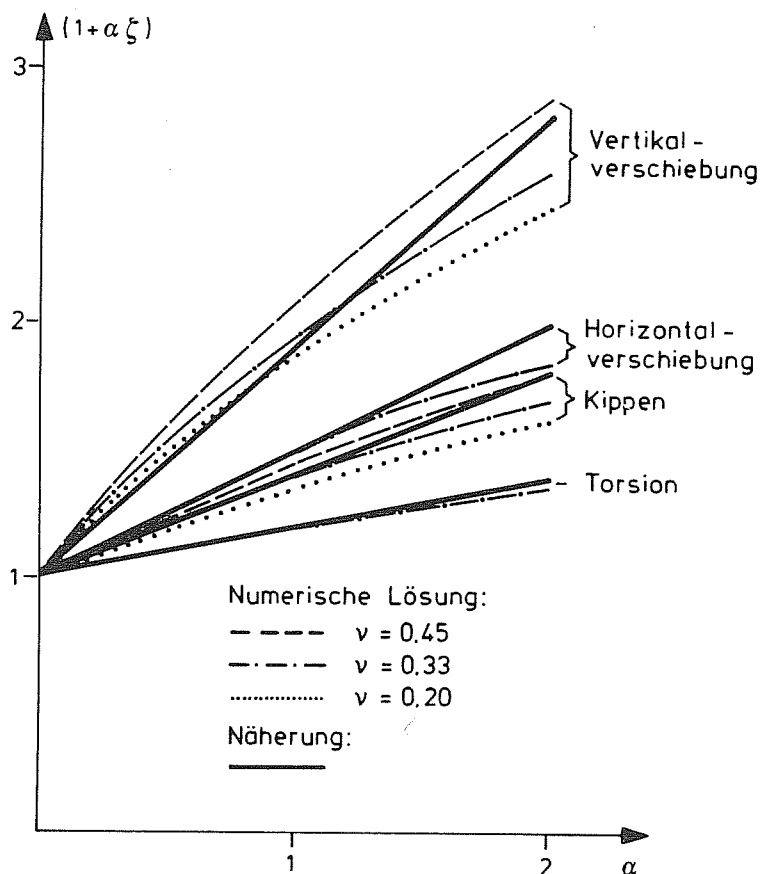


Abb. 2: Vergrößerungsfaktoren der statischen Steifigkeit

Die mit dieser Näherung erhaltenen Vergrößerungsfunktionen sind ebenfalls in Abb. 2 in Abhängigkeit von α dargestellt. Danach beträgt die maximale Abweichung 12%. In der Mehrzahl der praktischen Fälle, in denen die dynamischen Bodenkennwerte nur in grober Näherung bekannt sind, dürfte die vereinfachte Darstellung mittels einer repräsentativen Tiefe ausreichend sein. Rechnerisch genauere Werte können jedoch auch aus Abb. 2 entnommen werden.

4. Dynamische Steifigkeit

Die dynamische Steifigkeit \tilde{K} kann im Frequenzbereich als komplexe Zahl ausgedrückt werden zu:

$$\tilde{K} = K [k (1 + 2 i D) + i a c] \quad (4)$$

wobei K für die statische Steifigkeit und D für die Materialdämpfung des Bodens steht. Die Beiwerte k und c der Feder- und Dämpferkraft hängen von der dimensionslosen Frequenz

$$a = \omega \cdot R / \sqrt{\tilde{G}/\rho} \quad (4a)$$

ab. Darin bedeutet ρ die Dichte des Baugrunds und ω die Kreisfrequenz der harmonischen Bewegung. Bei einer Modalanalyse wählt man als Bezugsfrequenz die niedrigste Eigenfrequenz, in der der betrachtete Freiheitsgrad der Fundamentschwingung angeregt wird. Der Schubmodul

$$\tilde{G} = G_0 (1 + \alpha \cdot \tilde{\xi}) \quad (5)$$

ist auf die repräsentative Tiefe $\tilde{z} = \tilde{\xi} \cdot R$ bezogen.

Die dimensionslose Tiefe $\tilde{\xi}$ läßt sich näherungsweise darstellen zu

$$\tilde{\xi} = 2 \pi \delta \sqrt{G_0/\rho} / (\omega \cdot R) < 10 \cdot \delta \quad (6)$$

$$\delta = \begin{array}{l} 1.5 \text{ Vertikalverschiebung} \\ 0.75 \text{ Horizontalverschiebung} \\ 0.75 \text{ Kippen} \\ 0.25 \text{ Torsion} \end{array}$$

Die Beiwerte δ sind wiederum weitgehend invariant bezüglich α und ν . Die dynamische repräsentative Tiefe ist aber frequenzabhängig und bei niedrigen Frequenzen (lange Wellenlängen) größer als bei hohen Frequenzen (kurze Wellenlängen), vgl. Abb. 3.

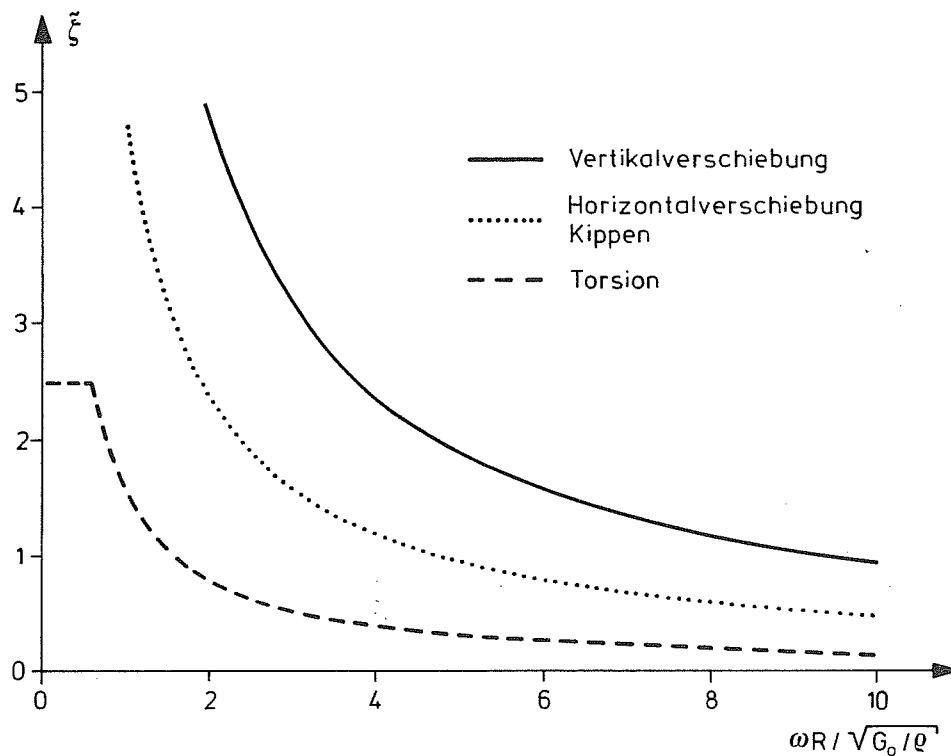


Abb. 3: Dimensionslose repräsentative Tiefe zur Bestimmung der dynamischen Steifigkeits- und Dämpfungsbeiwerte

Abstrahlungsdämpfung und Materialdämpfung des Bodens können für eine vorgegebene Frequenz zusammengefaßt werden zu

$$\xi = \frac{a}{2} \frac{c}{k} + D \quad (7)$$

Mit dem semifiniten Verfahren wurden die dynamischen Beiwerte k und c ermittelt und in Abhängigkeit von der dimensionslosen Frequenz a aufgetragen. Diese ist auf den Schubmodul \tilde{G} in der dynamischen repräsentativen Tiefe \tilde{Z} bezogen. Abb. 4 zeigt, daß die auf \tilde{Z} bezogenen dynamischen Beiwerte des inhomogenen Bodens denjenigen des homogenen Bodens ($a = 0$) entsprechen. Die Steifigkeitsbeiwerte k werden jedoch von denjenigen des homogenen Bodens leicht überschätzt, was zu einer geringen Unterschätzung des Dämpfungsmaßes ξ nach Gl. (7) führt.

Das Dämpfungsmaß ξ des inhomogenen Halbraums kann beträchtlich niedriger sein als dasjenige eines homogenen Halbraums mit dem Schubmodul G_0 , da a mit einem Anstieg von G abnimmt.

Die dynamischen Beiwerte in Abb. 4 gelten für eine Poissonzahl von 0.33. Eine ähnlich gute Übereinstimmung der dynamischen Beiwerte des homogenen und inhomogenen Bodens erhält man auch für die Poissonzahlen 0.2 und 0.45. Weiterhin läßt sich das Verfahren auch auf Rechteckfundamente mit zufriedenstellender Genauigkeit anwenden (WAAS & WERKLE 1984).

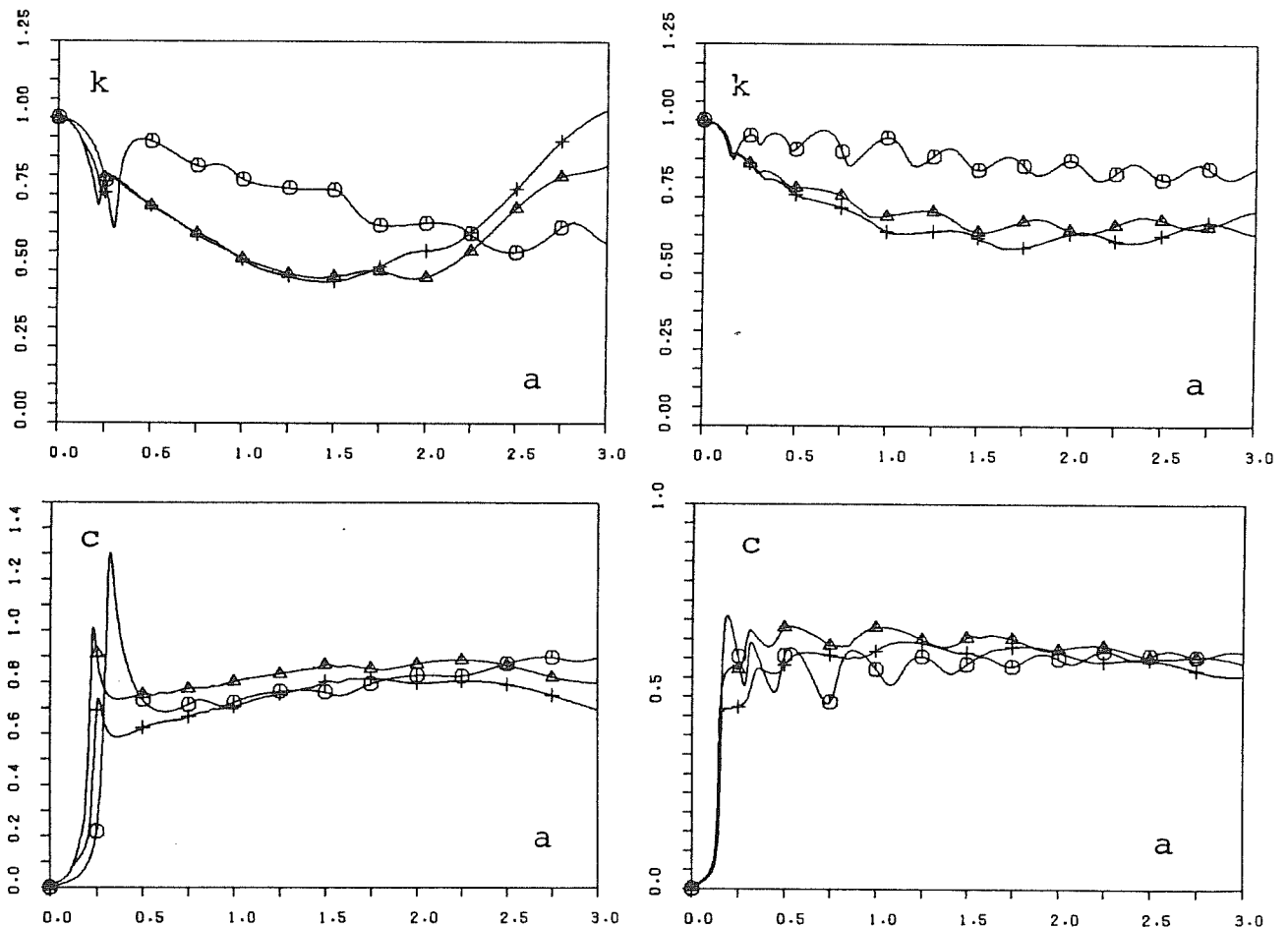
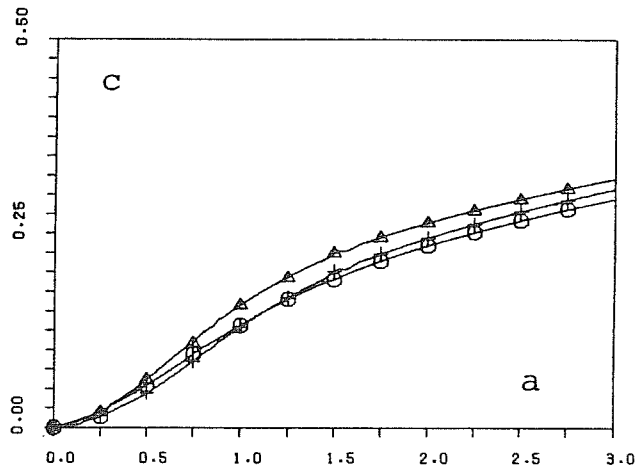
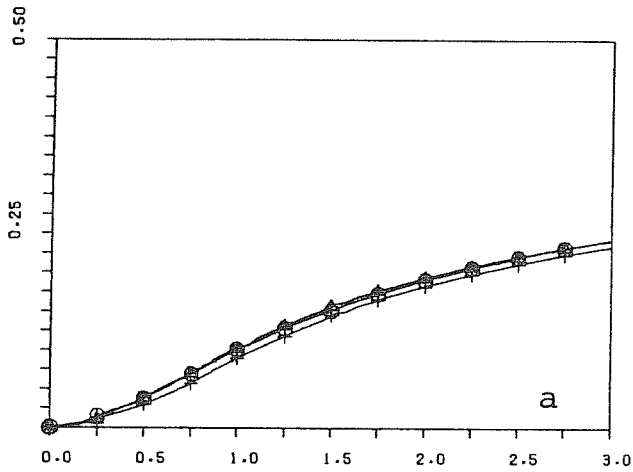
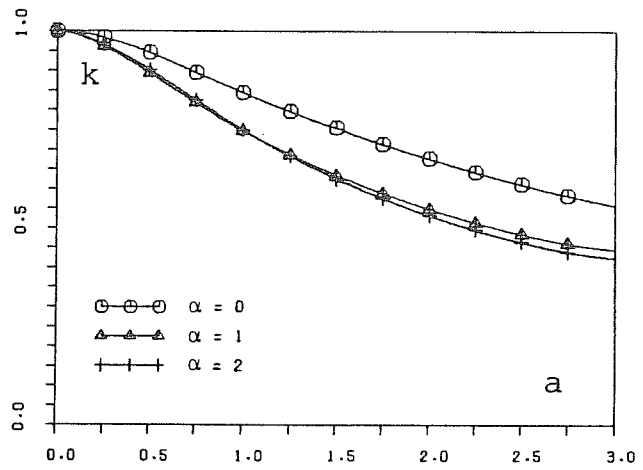
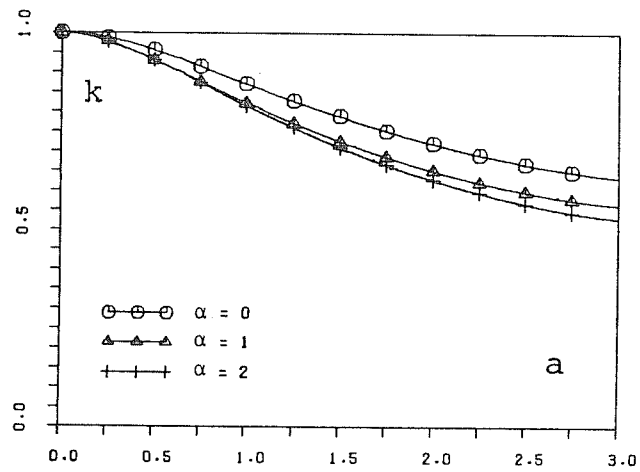


Abb. 4a:

Vertikal

Horizontal



Torsion

Kippen

Abb. 4b:

Abb. 4: Steifigkeits- und Dämpfungsbeiwerte für ein Kreisfundament auf einem inhomogenen Boden (Poissonzahl = 0.33)

5. Berechnungsbeispiel

Für den Nachweis der Erdbebensicherheit eines Bauwerks ist die Bodenfederung und Baugrunddämpfung für Horizontal- und Kippbewegung zu ermitteln. Das rechteckförmige Fundament hat eine Grundfläche von 23·43 m. Der Baugrund besteht aus mitteldichten Kiesen und Sanden.

Das Tiefenprofil des dynamischen Schubmodul ist in Abb. 5 angegeben. Es wurde in Labor- und Feldversuchen ermittelt und an den zu erwartenden Dehnungszustand infolge der Gebäudeauflast und der zusätzlichen Erdbebenbeanspruchung angepaßt. Die Materialdämpfung des Bodens beträgt 2.5%. Zur Berücksichtigung von Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der Bodenkennwerte wird der Schubmodul mit einer Streubreite von $\pm 30\%$ variiert.

Die Steifigkeits- und Dämpfungswerte des Fundaments werden ersatzweise an einem Kreisfundament ermittelt. Dabei werden für die translatorischen Freiheitsgrade die Flächen und für die rotatorischen Freiheitsgrade die Flächenträgheitsmomente gleich groß gewählt. In Tabelle 1 sind die Ersatzradien des Kreisfundaments, die Beiwerte ξ und α , der damit ermittelte

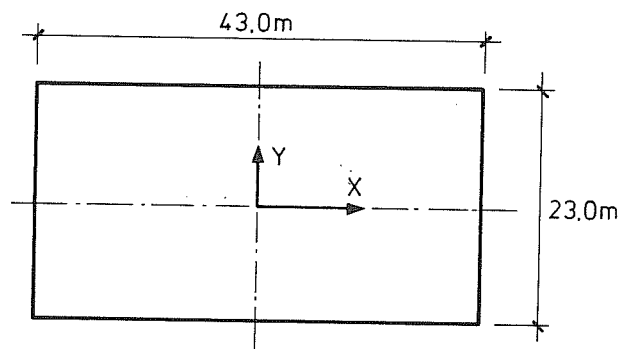
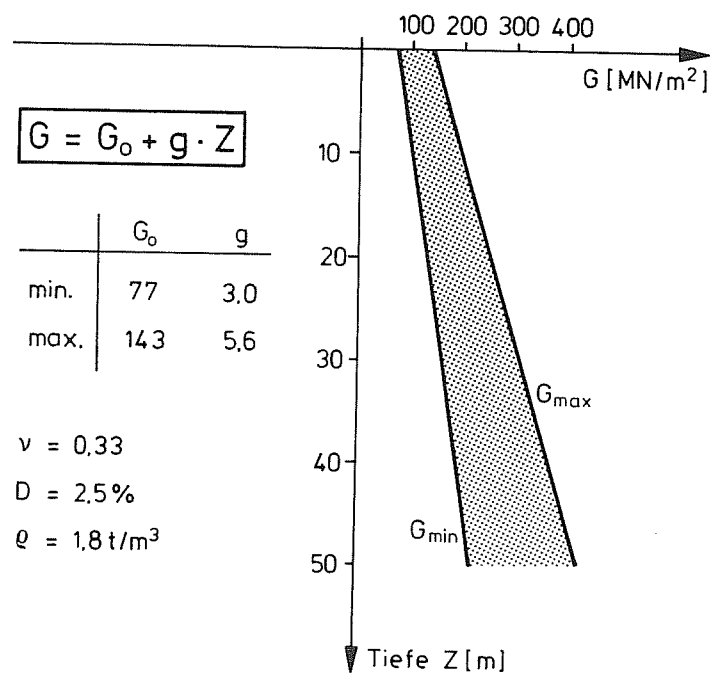
Fundament:Bodenprofil:

Abb. 5: Berechnungsbeispiel

Schubmodul \bar{G} des äquivalenten homogenen Halbraums sowie die resultierenden statischen Federwerte K angeben.

Die dynamische Steifigkeit und Dämpfung wird ausgehend von den von VELETOS & WEI (1971) für einen homogenen Halbraum angegebenen frequenzabhängigen Steifigkeits- und Dämpfungsbeiwerten ermittelt. Zur Anpassung an den inhomogenen Boden wird hierbei die dimensionslose Bezugshöhe \tilde{z} mit dem repräsentativen Schubmodul \bar{G} in der Tiefe $Z = \tilde{z} \cdot R$ bestimmt. Beispielsweise erhält man bei einer Frequenz von 3 Hz (die etwa der Eigenfrequenz eines 10 m hohen Gebäudes entspricht) für G_{\max} eine repräsentative Tiefe von

$$\tilde{z} = 2 \cdot \pi \cdot 0.75 \cdot \sqrt{143 / 0.0018} / (2 \cdot \pi \cdot 3.0) = 70.5 \text{ m}$$

und damit einen repräsentativen Schubmodul von $\bar{G} = 143 + 5.6 \cdot 70.5 = 538 \text{ MN/m}^2$. Die dimensionslose Frequenz α beträgt somit im Freiheitsgrad "Kippen um die x-Achse":

Tab. 1: Statische Steifigkeiten für das Berechnungsbeispiel

Boden- steifig- keit	Freiheitsgrad	R (m)	ζ	α	\bar{G} (MN/m ²)	K (MNm), (MN/m)
G_{\min}	Horizontal	17.74	0.50	0.69	104	$0.949 \cdot 10^4$
G_{\min}	Kippen XX	15.35	0.40	0.60	95	$0.167 \cdot 10^4$
G_{\min}	Kippen YY	20.99	0.40	0.82	102	$0.458 \cdot 10^7$
G_{\max}	Horizontal	17.74	0.50	0.70	193	$0.176 \cdot 10^5$
G_{\max}	Kippen XX	15.35	0.40	0.60	177	$0.311 \cdot 10^7$
G_{\max}	Kippen YY	20.99	0.40	0.82	190	$0.852 \cdot 10^7$

$$a = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 15.35 / \sqrt{538/0.0018} = 0.53$$

Nach Abb. 6 erhält man den Steifigkeitsbeiwert k zu 0.94 und den Dämpfungsbeiwert c zu 0.05. Die dynamische Steifigkeit unterscheidet sich nur unwesentlich von der statischen Steifigkeit, so daß bei einer Modalanalyse die Eigenfrequenz hierdurch praktisch nicht beeinflußt würde. (Bei größeren Abweichungen würde man die berechnete Eigenfrequenz iterativ verbessern.) Das Dämpfungsmaß ξ erhält man zu

$$\xi = \frac{0.53}{2} \cdot \frac{0.05}{0.94} + 0.025 = 0.014 + 0.025 = 3.9\%$$

Die Abstrahlungsdämpfung beträgt somit hier nur 1.4%. Die Steifigkeits- und Dämpfungsfunktionen sowie das Dämpfungsmaß ξ der Abstrahlungsdämpfung (mit $D=0$) sind über den Frequenzachsen des Berechnungsbeispiels in Abb. 6 (mit $f = \omega / (2 \pi)$) angegeben. Da die Bezugfrequenz a nicht linear mit der Frequenz der harmonischen Bewegung ansteigt (\bar{G} hängt von ζ und damit von ω ab!), wird beim inhomogenen Boden die Frequenzachse dieser Funktionen verzerrt.

Zum Vergleich soll die Dämpfung für einen Halbraum ermittelt werden, der dieselbe statische Steifigkeit wie der inhomogene Boden besitzt. In diesem Fall erhält man

$$a = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 15.35 / \sqrt{177 / 0.0018} = 0.92$$

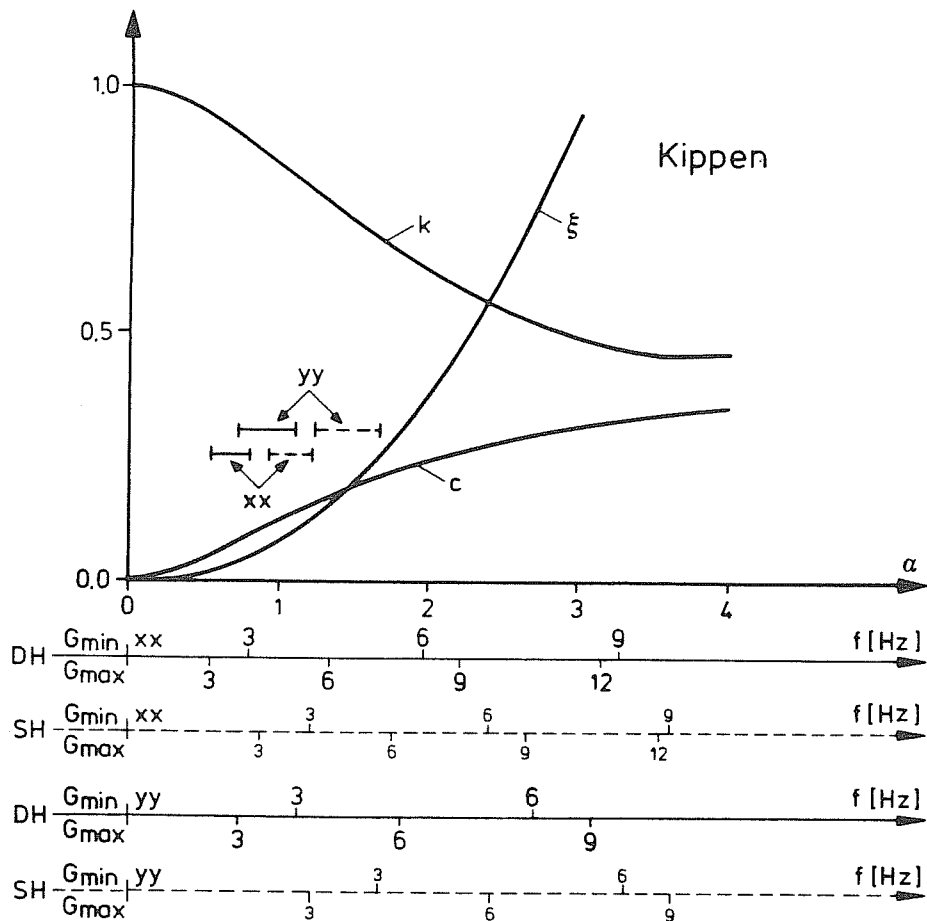
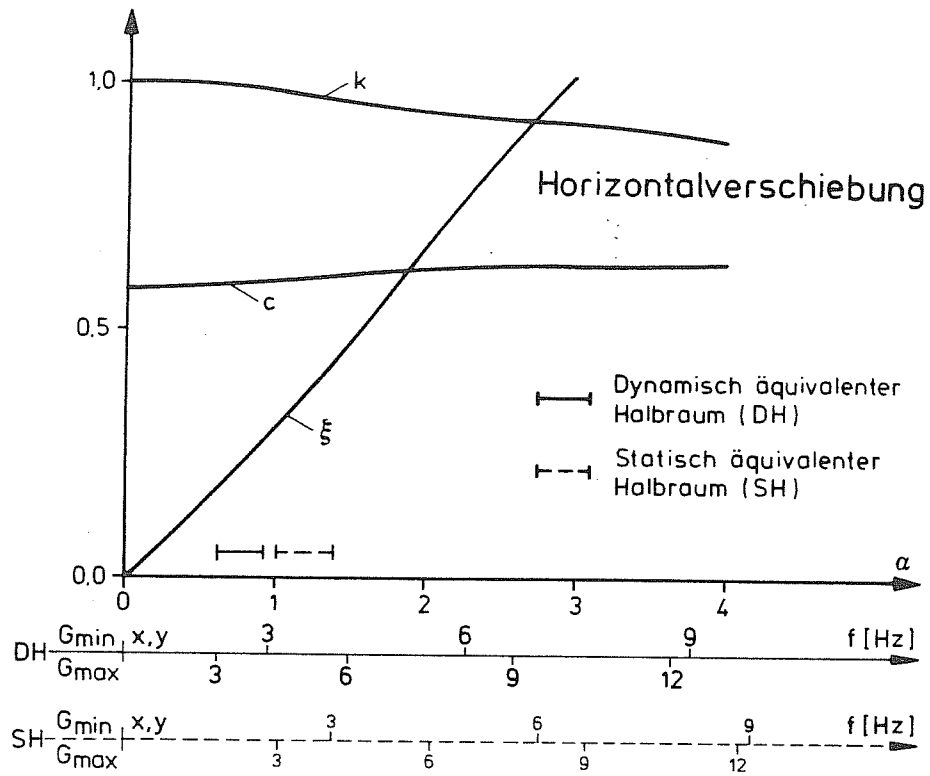


Abb. 6: Dynamische Steifigkeits- und Dämpfungsfunktionen für das Berechnungsbeispiel

und damit $k = 0.85$; $c = 0.11$ und

$$\xi = (0.92/2) \cdot (0.11/0.85) + 0.025 = 0.06 + 0.025 = 8.5\%.$$

Das heißt: wenn man den Schubmodul des statisch äquivalenten Halbraums verwendet, um die Abstrahlungsdämpfung zu ermitteln, überschätzt man die wirkliche Dämpfung im inhomogenen Boden erheblich. Dies gilt auch für die übrigen Frequenzen und Freiheitsgrade (vgl. Abb. 6).

6. Zusammenfassung

Die dynamische Steifigkeit eines starren Fundaments auf einem inhomogenen Boden, in dem die Steifigkeit linear mit der Tiefe zunimmt, kann durch diejenige eines Fundaments auf einem homogenen Halbraum ausgedrückt werden. Der Schubmodul dieses homogenen Halbraums entspricht dem Schubmodul des inhomogenen Halbraums in einer repräsentativen Tiefe. Die repräsentativen Tiefen der statischen Steifigkeit unterscheiden sich für vertikale und horizontale Bewegung sowie für die Kipp- und Torsionsbewegung. Für die frequenzabhängigen Steifigkeits- und Dämpfungsbeiwerte erhält man andere repräsentative Tiefen. Diese hängen von der Wellenlänge im Boden und damit von der Schwingungsfrequenz ab. Die Dämpfung im inhomogenen Boden kann beträchtlich niedriger sein als in einem homogenen Boden mit derselben statischen Steifigkeit.

Literatur

- BYCROFT, G.N. (1956): Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A 248, 327-368, London.
- HADJIAN, A.H. & LUCO, J.E. (1977): On the importance of layering on the impedance functions, Proc. 6th WCEE, 1675-1681, New Delhi.
- HOLZLÖHNER, U. (1979): The use of an equivalent homogeneous half-space in soil-structure interaction analyses. SMiRT 5, M 10/3, Berlin.
- KAUSEL, E. & ROESSET, J.M. (1975): Dynamic stiffness of circular foundations. ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division 101, 771-785.
- KAUSEL, E., WHITMAN, R.V., MORRAY, J.F. & ELSABEE, F. (1978): The spring method for embedded foundations. Nuclear Engineering and Design 48, 377-392.
- KOBORI, T., MINAI, R. & SUZUKI, T. (1966): Dynamic ground compliance of a rectangular foundation on an elastic stratum. Proc. of the 2nd Japan Earthquake Engineering Symposium, 261-266.
- LUCO, J.E. (1974): Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium, Nuclear Engineering and Design 31, 204-217.

- LUCO, J.E. (1976): Vibrations of a rigid disc on a layered viscoelastic medium. *Nuclear Engineering and Design* 36, 325-340.
- SHAH, P.M. (1968): On the dynamic response of foundation systems. Ph. D. Thesis, Rice University Houston, Texas.
- TSAI, N.C. (1981): A review of experimental soil-structure interaction damping, SMiRT 6, K3/10, Paris.
- VELETOS, A.S. & WEI, Y.T. (1971): Lateral and rocking vibration of footings, struct. res. report 8, Rice University Houston, Texas.
- WAAS, G. & WERKLE, H. (1984): Schwingungen von Fundamenten auf inhomogenem Baugrund, VDI-Schwingungstagung 1984, Bad Soden im Taunus.
- WAAS, G., RIGGS, H.R. & WERKLE, H. (1985): Displacement solutions for dynamic loads in transversely isotropic stratified media. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, John Wiley, Vol. 13, 173-193.
- WERKLE, H. & WAAS, G. (1986): Dynamic stiffness of foundations on inhomogeneous soils, Eight European Conference on Earthquake Engineering, Lissabon.
- WONG, H.L. & LUCO, J.E. (1985): Tables of impedance functions for square foundations on layered media. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 4, 64-80.