

Modellierung von Stützen mit Pilzkopfverstärkung bei Flachdecken

Horst Werkle¹, Thomas Friedrich² und Josef Sutter¹

1 Einleitung

Die wohl häufigste Anwendung der Finite Element Methode in der Praxis stellt die Berechnung von Deckenplatten dar. Flachdecken können im Bereich der Stütze eine Pilzkopfverstärkung erhalten, um die Biegebewehrung über der Stütze zu reduzieren und das Durchstanzverhalten zu verbessern.

Zur Finite-Element-Modellierung der Stützen von Flachdecken gibt es heute kein einheitliches Konzept. Darüber hinaus ergeben sich in der Praxis bei der Ergebnisinterpretation oft Fragen, deren Ursache Inkonsistenzen bei der Modellierung sind. Im folgenden werden zunächst die derzeit verwendeten Modelle diskutiert und ein neues, konsistentes Modell vorgestellt. Weiterhin werden die Anwendung auf die Berechnung von Flachdecken mit Pilzkopfverstärkungen gezeigt und dimensionslose Beiwerte zur Ermittlung der maßgebenden Schnittgrößen mitgeteilt.

2 Modellierungskonzepte für Stützen bei Flachdecken

Die Berechnung von Flachdecken war bereits recht früh ein Gegenstand der Computeranwendung in der Statik. Man verwendete hierzu ab Mitte der 70-er Jahre meist die Finite Element Methode. Stützen wurden zunächst als Punktlager im Plattenmodell dargestellt. Aufgrund der Einschränkungen und Unzulänglichkeiten dieses Modells wurden später weitere Modelle entwickelt. Heute gibt es folgende Modellierungskonzepte:

- Punktlager
- Elastische Bettung der Platte am Stützenkopf
- Flüssigkeitskissen-Modell (konstante Pressung am Stützenkopf)
- Starre Lagerung oder Einspannung der Plattenelemente durch die Stütze
- Starrkörpermodell des Stützenkopfes durch kinematische Kopplungsbedingungen
- Berücksichtigung der Stützenschnittgrößen als Lagrange-Parameter im Arbeitsausdruck des Finite-Element-Systems
- Dreidimensionales Volumenmodell im Stützenbereich

Die beiden letztgenannten Modelle sind wegen des Aufwandes derzeit nur im Forschungsbereich von Interesse, die übrigen Modelle werden in der Praxis angewandt.

Bei der Punktlagerung eines Knotenpunkts des Finite-Element-Modells werden die Schnittgrößen an der Stütze singular [1]. Dennoch kann das Modell in der Praxis bei schlanken Stützen sinnvoll eingesetzt werden [2]. Die Modellierung der Stütze als elastisch gebetteter Plattenbereich vermeidet Singularitäten an der Stütze. Die Bettungszahl wird in der Regel aus der Vertikalsteifigkeit der Stütze ermittelt. Mit der Stützenfläche A_s und der Stützenlänge h erhält man die Vertikalfeder der Stütze zu $k_z = E \cdot A_s / h$. Setzt man die Einwirkungsfläche der Stütze gleich der Stützenfläche ist die Bettungszahl $k_{s_z} = E/h$. Geht man hingegen davon aus, dass der Stützenkopf eine Drehung anstelle einer Vertikalverschiebung durchführt, erhält man eine andere Bettungszahl. Für eine am Fußpunkt gelenkig gelagerte Einzelstütze ergibt sich mit der

¹ Fachhochschule Konstanz, Konstanz

² Domostatik AG, Zürich

Drehfeder $k_{\phi_y} = 3 \cdot E \cdot I_y / h$ die Bettungszahl zu $k_{s_z} = 3 \cdot E / h$ bzw. bei einer unten eingespannten Stütze $k_{s_z} = 4 \cdot E / h$. Bei einer Einspannung in eine Stütze im oberen und eine Stütze im unteren Stockwerk addieren sich die beiden entsprechenden Bettungszahlen. Die elastische Lagerung und Einspannung einer Stütze lässt sich also durch eine Bettungszahl nicht eindeutig beschreiben.

In der Praxis wird heute im Allgemeinen das Modell der elastischen Bettung mit einer Bettungszahl $k_{s_z} = E / h$ zur Modellierung von Stützen bei Flachdecken vorgezogen. Diese Modellierung ist nicht problemlos. Vielmehr bestehen folgende Unzulänglichkeiten:

- Beim Modell der elastischen Bettung ist die Größe der Bettungszahl nicht eindeutig bestimmbar, da sie einerseits die Steifigkeit aus der Normalkraftverformung der Stütze und andererseits diejenige aus der Biegeverformung berücksichtigen soll. Im Sinne des c_u/c_o -Verfahrens des Stahlbetonbaus sollte sie auch die elastische Einspannung in die Stütze des unteren und gegebenenfalls auch des oberen Stockwerks enthalten.
- Bei elastischer Bettung tritt ein Moment am Stützenkopf auf. Dessen Weiterleitung in die Stütze wird in der Praxis fast immer vernachlässigt, was im Sinne einer konsistenten Lastabtragung nicht zulässig ist.
- Einspanneffekte, z.B. in Randstützen werden nicht zuverlässig erfasst.

Die Modellierung der Lagerung einer Flachdecke mit einer Stütze kann demnach derzeit nicht als geklärt gelten. Daher wurde als neues Modell ein Koppelfederelement entwickelt, das die genannten Inkonsistenzen nicht aufweist.

3 Koppelfederelement zur Modellierung der Stützen bei Flachdecken

Beim Koppelfedermodell wird die elastische Lagerung der Platte nicht durch Einzelfedern wie bei einer elastischen Bettung dargestellt, vielmehr sind die Federn untereinander gekoppelt. Man erhält somit eine Steifigkeitsmatrix für die elastische Lagerung. Diese berücksichtigt sowohl die Biege- wie auch die Vertikalsteifigkeit der Stütze. Das Modell vermeidet Singularitäten der Plattenschnittgrößen und eignet sich somit auch für adaptive Netzverfeinerungen.

Zur Herleitung des Koppelfederelements werden die von der Stütze in die Platte eingeleiteten Spannungen im Finite-Element-Modell der Platte durch äquivalente Knotenkräfte im Sinne des Arbeitsprinzips der Statik dargestellt. Für ein einzelnes Plattenelement erhält man die Knotenkräfte zu $\underline{F}^{(el)} = \int \underline{N} \cdot p \cdot dA$ wobei \underline{N} die Interpolationsfunktionen der virtuellen Verschiebungen und p die über die Elementfläche veränderliche Flächenlast bedeuten [1]. Die Flächenlasten stellen hier die von der Stütze eingeleiteten Pressungen dar und werden nach Bernoulli linear angesetzt. Summiert man die so erhaltenen Kräfte für alle Plattenelemente, so lässt sich die Gleichung zur Transformation der Stützenendgrößen \underline{F}_{St} in die Knotenkräfte \underline{F}_{Pl} des Plattenmodells angeben zu:

$$\underline{F}_{Pl} = \underline{T}^T \cdot \underline{F}_{St} \quad (1)$$

Eine entsprechende Transformationsbeziehung erhält man auch für die Knotenverschiebungen \underline{w}_{Pl} der Platte und die Freiheitsgrade \underline{w}_{St} am Stützenkopf:

$$\underline{w}_{St} = \underline{T} \cdot \underline{w}_{Pl} \quad (2)$$

Die Steifigkeit der Stütze wird mit der vertikalen Verschiebungsfeder k_z und den Drehfedern $k_{\xi\xi}$ und $k_{\eta\eta}$ um die beiden Hauptachsen des Stützenquerschnitts beschrieben zu:

$$\begin{bmatrix} F_z \\ M_\eta \\ M_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_z & 0 & 0 \\ 0 & k_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\xi\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_z \\ \phi_\eta \\ \phi_\xi \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{F}_{St} = \underline{K}_{St} \cdot \underline{w}_{St} \quad (3a)$$

Die auf die Knotenpunkte der Platte bezogene Steifigkeit lässt sich nun durch Transformation der Kraftgrößen mit (1) und der Verschiebungsgrößen mit (2) leicht ermitteln zu

$$\underline{F}_{Pl} = \underline{K}_{Pl} \cdot \underline{w}_{Pl}, \quad (4)$$

wobei
$$\underline{K}_{Pl} = \underline{T}^T \cdot \underline{K}_{St} \cdot \underline{T} \quad (5)$$

die Steifigkeitsmatrix des Koppelfederelements bedeutet. Nach der Lösung der globalen Systemgleichungen werden die Schnittgrößen am Stützenkopf ermittelt zu:

$$\underline{F}_{St} = \underline{K}_{St} \cdot \underline{w}_{St} = \underline{K}_{St} \cdot \underline{T} \cdot \underline{w}_{Pl} \quad (6)$$

Die Herleitung eines Koppelfederelements für ein einzelnes Plattenelement findet sich in [4], eine umfassendere Darstellung in [5]. Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt darin, dass einerseits numerisch ungünstige starre Elemente vermieden werden und auf der anderen Seite eine Modellierung der Kopplung zwischen der Biege- und Vertikalsteifigkeit der Stütze möglich ist. Setzt man die Drehfedern zu Null, so werden wie beim Flüssigkeitskissenmodell nur Normalkräfte in die Stütze eingeleitet und die Pressungen am Stützenkopf sind konstant.

4 Flachdecken ohne Pilzkopfverstärkung

Die Genauigkeit der Schnittgrößen hängen nicht nur vom Tragwerksmodell der Stützenlagerung sondern auch von der gewählten Finite-Element-Diskretisierung, insbesondere im Umfeld der Stütze ab. Folgende Einflüsse werden anhand von Beispielen an einer regelmäßigen Flachdecke mit quadratischem Stützenraster der Seitenlänge ℓ in [6] untersucht:

- Finite-Element-Diskretisierung der Platte über dem Stützenquerschnitt
- Finite-Element-Diskretisierung der Platte im Stützenumfeld
- Elementanzahl zwischen zwei Stützen im Deckenfeld
- Einfluss der Größe der elastischen Bettung
- Einfluss der Kopplung der Federn aus Normal- und Biegebeanspruchung

Bild 1 zeigt den Ausschnitt eines Feldes. Die Querdehnzahl beträgt $\mu = 0.2$, die Bettungszahl wurde zu $6 \cdot E/\ell$ gewählt, wobei E der Elastizitätsmodul und ℓ die Stützweite bedeuten, und das Verhältnis von Plattendicke zu Stützweite ist $1/30$. Alle Berechnungen wurden mit einem Schubweichen Plattenelement mit Verschiebungsansatz nach [3] durchgeführt.

	Modell A (1 Element)	Modell B (4 Elemente)
Anschnittsmomente $m_y/(q \cdot \ell^2)$	-0.203	-0.233
Integrierte Stützmomente $M_y/(q \cdot \ell^3)$	-0.0712	-0.0768
Integrierte Feldmomente $M_y/(q \cdot \ell^3)$	0.0416	0.0417

Tabelle 1: Einfluß der Diskretisierung der Platte über der Stütze auf die Ergebnisse

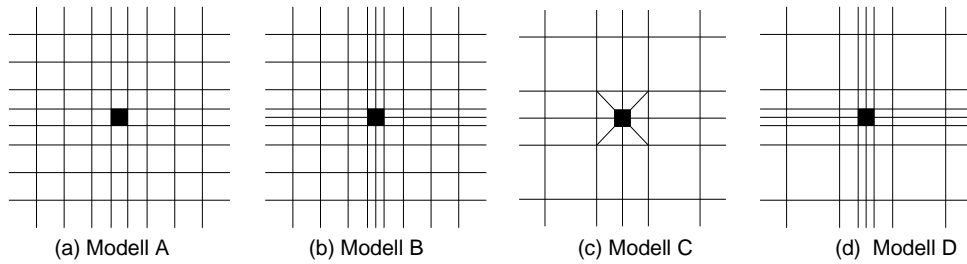
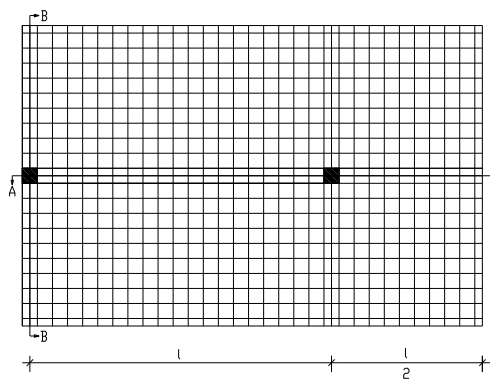


Bild 1: Finite-Element-Diskretisierung der Platte über dem Stützenquerschnitt

Im Modell A ist die Stützenfläche mit einem Finiten Element abgebildet, während in Modell B hierfür vier Elemente vorgesehen sind. In Tabelle 1 werden die Anschnittsmomente und die integrierten Momente M_y im Feld und über der Stütze verglichen. Das Beispiel zeigt, dass eine Elementierung der Platte über der Stütze mit vier Elementen für eine ausreichende Genauigkeit erforderlich ist.

Das unmittelbare Umfeld der Stütze wird in [6], [7] mit den beiden Finite-Element-Modellen C und D, die beide vier Elemente im Stützenkopfbereich vorsehen, untersucht. Danach liefert das Finite-Element-Modell C im Schnitt über die Stützen auch bei einer recht groben Diskretisierung mit einer Einteilung der lichten Stützweite in 6 Elemente noch gute Ergebnisse, während das beim Finite-Element-Modell D erst bei der Einteilung in 12 Elemente der Fall ist. Auf die Momente im Feld hat die Finite-Element-Diskretisierung im unmittelbaren Stützenumfeld keinen nennenswerten Einfluss. Empfohlen werden kann daher eine Einteilung der lichten Stützweite von 6-10 Elemente in Verbindung mit dem Finite-Element-Modell C im Stützenumfeld.



— freier Rand - - - Symmetrieachse

Bild 2: Flachdecke mit freiem Rand

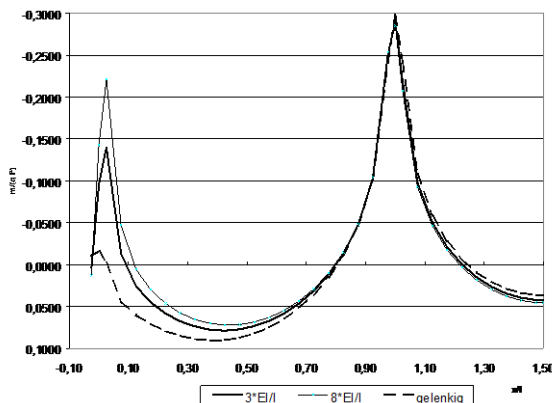


Bild 3: Momente m_x mit Federelement bei unterschiedlicher Wahl der Drehfedersteifigkeit

Der Einfluss der Größe der elastischen Bettung und der Kopplung von Biege- und Normalspannungen wird am Beispiel des in Bild 2 dargestellten Plattenstreifens mit einem freien Rand untersucht. zeigt die Momente im Schnitt A-A für eine Koppelfeder, wobei die Biegefederkonstanten zwischen 0 (gelenkige Lagerung) und $8 \cdot EI/h = 16 \cdot EI/\ell$ (entsprechend zwei eingespannten Stützen der Höhe $\ell/2$ oben und unten) variiert wurde. Die Ergebnisse zeigen, dass sich die Größe der Bettungszahl bei elastischer Bettung nur bei der Randstütze nicht aber bei der Innenstütze merklich auswirkt. Weiterhin stimmen nach [6] die Ergebnisse des Koppelfedermodells mit denjenigen der elastischen Bettung an der Innenstütze gut überein. An der Randstütze gilt dies aber nur, wenn die Bettungszahl aufgrund der Biegesteifigkeit der Stütze, also beispielsweise für eine gelenkig gelagerte Einzelstütze mit $3 \cdot E/h = 6 \cdot E/\ell$, nicht aber mit $E/h = 2 \cdot E/\ell$ (Normalkraftsteifigkeit) bestimmt wurde. Dies bedeutet, dass grundsätzlich das Koppelfedermodell vorzuziehen ist, da hiermit die Steifigkeit aus der Normalkraft- und der Biegeverformung immer zutreffend erfasst wird. Ist aber in dem verwendeten Programm kein Koppelfedermodell verfügbar, sollte die Stütze mit einer elastischen Bettung, deren Bettungszahl der Biegesteifigkeit entspricht, abgebildet werden.

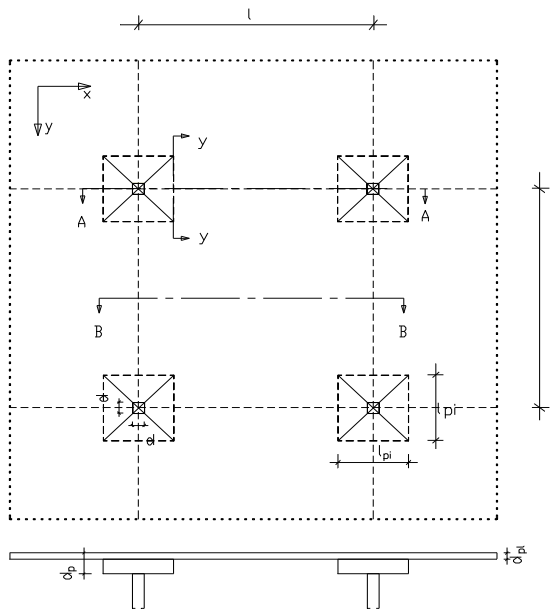


Bild 4: Ausschnitt aus einer regelmäßigen Flachdecke mit Pilzkopfverstärkungen

5 Flachdecken mit Pilzkopfverstärkung

Bei Flachdecken mit Pilzkopfverstärkungen gelten ebenfalls die oben angegebenen Empfehlungen. Darüber hinaus ist auch der verstärkte Plattenbereich ausreichend fein zu diskretisieren. Bild 4 zeigt einen Ausschnitt aus einer regelmäßigen Flachdecke mit Pilzkopfverstärkungen. Der Einfluss der Diskretisierung wird am Beispiel einer Platte mit einem Stützenraster von $l_x = l_y = 6 \text{ m}$, einer Plattenstärke von 20 cm, einem quadratischen Stützenquerschnitt mit $d=30 \text{ cm}$ und einer Verstärkung von $d_p = 2,0 \cdot d_{pl}$ in einem quadratischen Bereich von $l_{pilz} = 0,3 \cdot l_x$ untersucht. Die Stütze wird durch 4 elastisch gebettete Elemente mit einer Bettungszahl von $3 \cdot E/l$ dargestellt. Die Momente in einem Viertel der Platte sind für verschiedene regelmäßige Diskretisierungen des Plattenfeldes Bild 5 dargestellt. Bei einer Elementierung mit 10 Elementen zwischen den Auflagern, die einer Unterteilung des Abstandes

zwischen dem Rand des verstärkten Bereichs und dem Stützenrand in 2 Elemente entspricht, sind die Ergebnisse ungenauer als bei einer Unterteilung in 20 bzw. 40 Elemente. Integriert man die Momente zu resultierenden Momenten auf, so sind die Unterschiede allerdings praktisch unbedeutend (vgl. Tabelle 2). Dennoch erfordert im allgemeinen die Pilzkopfverstärkung geringere Elementgrößen als dies bei Decken ohne Pilzkopfverstärkung der Fall ist. Der Momentensprung am Rand der Pilzkopfverstärkung kann aus der Momenten-Krümmungs-Beziehung hergeleitet werden. Links und rechts des Randes Y-Y sind nämlich die Krümmungen $\kappa_{y,v}$ und $\kappa_{y,p}$ sowie die Momente $m_{x,v}$ und $m_{x,p}$ jeweils gleich. Man erhält hieraus das Verhältnis der Momente $m_{y,v}$ und $m_{y,p}$ im verstärkten und im unverstärkten Bereich zu:

$$\frac{m_{y,v}}{m_{y,p}} = \left(\frac{h_v}{h_p}\right)^3 \left/ \left(1 + \mu \cdot \left(\left(\frac{h_v}{h_p}\right)^3 - 1 \right) \cdot \frac{m_{x,v}}{m_{y,v}} \right) \right. \quad (7)$$

Für die Querdehnzahl $\mu = 0$ ist das Verhältnis zwischen dem Moment in der Verstärkung und der Platte $(h_v/h_p)^3$. Für $\mu \neq 0$ hängt der Momentensprung vom Verhältnis der Momente $m_{x,v}$ und $m_{y,v}$ in x- und y-Richtung im verstärkten Bereich ab (Tabelle 3).

6 Regelmäßige Flachdecke mit Pilzkopfverstärkung

Die Pilzkopfverstärkung ist für die Verteilung der Momente in der Platte von großer Bedeutung. Wie dies aus Bild 5 ersichtlich ist, werden in hohem Maße Momente vom Feld in den Pilzkopf verlagert. Für verschiedene Abmessungen des Pilzkopfes sind in Tabelle 4 die integrierten Momente im Feld und über den Stützen für einen Streifen mit der Breite des Pilzes (Stützstreifen) und für die restliche Breite (Feldstreifen) angegeben. Mit zunehmender Breite und Dicke der Pilzkopfverstärkung wird der Anteil des Stützmomentes am Gesamtmoment größer. Das Gesamtmoment aus Stütz- und Feldmoment im Stütz- und Feldstreifen beträgt aus Gründen des Gleichgewichts am Gesamtsystem ca. $M_{tot} = q \cdot \ell^3 / 8$. Die geringe Abweichung gegenüber diesem Wert beruht vor allem auf der Verringerung der Stützweite infolge der flächenhaften Lagerung und wird auch von der Größe der Bettungszahl bei elastischer Bettung bzw. der Größe der Federn beim Koppelfedermodell beeinflusst.

Diskretisierung eines Plattenfeldes	10 × 10	20 × 20	40 × 40
Stützmomente Schnitt A-A	-0.0928	-0.0906	-0.0896
Momentensumme der Schnitte A-A + B-B	0.1226	0.1198	0.1186

Tabelle 2: Über die Stützweite l_x integrierte Plattenmomente $m_y / (p \cdot l_x^3)$ einer Pilzdecke, $l_p = 0,3 \cdot l$

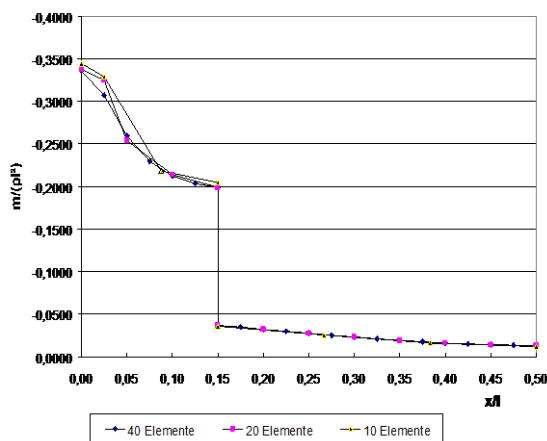
$m_{x,v} / m_{y,v}$	0	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$\frac{h_v}{h_p}$	1.0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	1.5	3.38	2.73	2.49	2.29	1.97	2.12	1.84
	2.0	8.00	4.71	3.90	3.33	2.58	2.91	2.32
	2.5	15.63	6.35	4.89	3.98	2.90	3.36	2.55
	3.0	27.00	7.50	5.51	4.36	3.07	3.60	2.67

Tabelle 3: Momentensprung $\frac{m_{y,v}}{m_{y,p}}$ am Rand der Pilzkopfverstärkung für $\mu = 0.2$

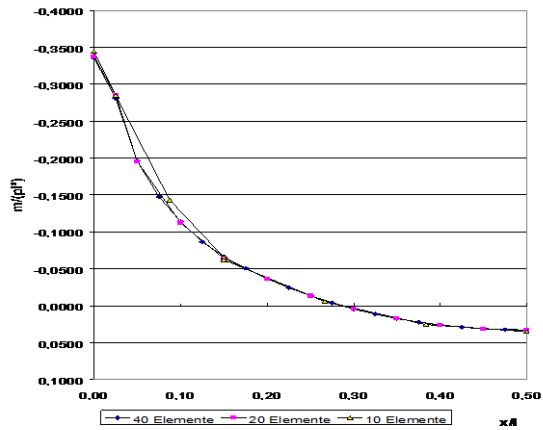
7 Zusammenfassung und Ausblick

Zur Modellierung von Stützen bei Flachdecken wird ein Koppelfedermodell vorgestellt, das sowohl die Normalkraftverformungen wie auch die Biegeverformungen der Stütze wiedergibt. Steht in dem verwendeten Programm kein Koppelfedermodell zur Verfügung, sollte die Stütze mit einer elastischen Bettung, deren Bettungszahl der Biegesteifigkeit entspricht, abgebildet werden. Die in die Stütze eingeleiteten Momente müssen dann aus der Verformung der Federn von Hand ermittelt werden. Dies ist insbesondere bei Rand- und Eckstützen von Bedeutung, um die dort auftretenden Einspanneffekte zu erfassen. Flachdecken mit Pilzkopfverstärkungen reagieren auf die Größe der elastischen Lagerung empfindlicher als solche ohne Pilzkopfverstärkung.

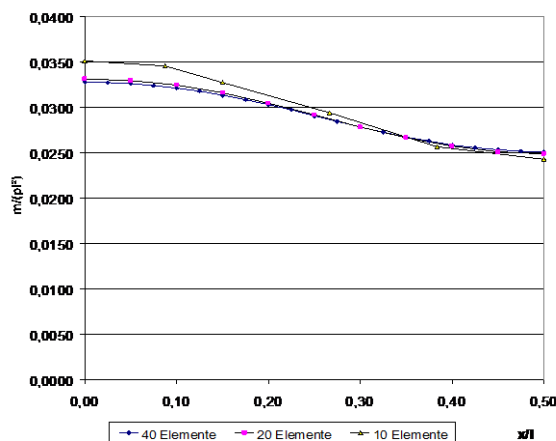
Das Konzept der Koppelfedermatrix lässt sich auch auf andere Fälle erweitern, bei denen Tragwerksteile mit unterschiedlichem Modellierungsgrad von Schnittgrößen und Spannungen zusammentreffen wie z.B. bei Stützen in Scheibentragwerken.



(a) $m_y / (p \cdot \ell^2)$ Stützenstreifen (A-A)



(b) $m_x / (p \cdot \ell^2)$ Stützenstreifen (A-A)



(c) $m_y / (p \cdot \ell^2)$ Feldstreifen (B-B),

Bild 5: Momente m_y bzw. m_x einer regelmäßigen Flachdecke mit Pilzkopfverstärkungen

Pillzlänge	Pillzdicke	Integrierte Momente					
		M _{ST_Pilz}	M _{ST_Feld}	M _{ST_Pilz+} M _{ST_Feld}	M _{FE_Pilz}	M _{FE_Feld}	M _{FE_Pilz+} M _{FE_Feld}
0.20 ℓ	1.0d _{pl}	-0,0387 50,2%	-0,0384 49,8%	-0,0771	0,0101 24,3%	0,0314 75,7%	0,0416
	1.5d _{pl}	-0,0524 63,6%	-0,0300 36,4%	-0,0824	0,0086 23,6%	0,0278 76,4%	0,0364
	2.0d _{pl}	-0,0596 70,4%	-0,0250 29,6%	-0,0846	0,0080 23,4%	0,0262 76,6%	0,0342
	2.5d _{pl}	-0,0634 74,1%	-0,0222 25,9%	-0,0856	0,0078 23,5%	0,0254 76,5%	0,0332
0.30 ℓ	1.0d _{pl}	-0,0494 64,1%	-0,0276 35,9%	-0,0771	0,0149 35,8%	0,0266 64,2%	0,0416
	1.5d _{pl}	-0,0654 76,4%	-0,0202 23,6%	-0,0856	0,0114 34,5%	0,0216 65,5%	0,0330
	2.0d _{pl}	-0,0740 82,6%	-0,0156 17,4%	-0,0896	0,0098 33,6%	0,0194 64,4%	0,0292
	2.5d _{pl}	-0,0788 86,0%	-0,0128 14,0%	-0,0916	0,0090 33,1%	0,0182 72,9%	0,0272
0.40 ℓ	1.0d _{pl}	-0,0573 74,3%	-0,0198 25,7%	-0,0771	0,0194 46,6%	0,0221 53,4%	0,0416
	1.5d _{pl}	-0,0748 84,2%	-0,0140 15,8%	-0,0888	0,0134 44,7%	0,0166 55,3%	0,0300
	2.0d _{pl}	-0,0844 89,6%	-0,0098 10,4%	-0,0942	0,0104 42,6%	0,0140 57,4%	0,0244
	2.5d _{pl}	-0,0896 92,4%	-0,0074 7,6%	-0,0970	0,0092 41,8%	0,0128 58,2%	0,0220

M_{ST_Pilz} = Stützmoment im Pillzstreifen
M_{FE_Pilz} = Feldmoment im Pillzstreifen

M_{ST_Feld} = Stützmoment im Feldstreifen
M_{FE_Feld} = Feldmoment im Feldstreifen

Tabelle 4: Integrierte Momente beim Innenfeld einer regelmäßigen, quadratischen Pillzdecke

Literatur

- [1] Werkle H., Finite Elemente in der Baustatik, Vieweg, Wiesbaden, 1995
- [2] Ramm E., J. Müller, Flachdecken und Finite Elemente – Einfluss des Rechenmodells im Stützenbereich, Finite Elemente – Anwendungen in der Baupraxis, Bochum 1988, Ernst & Sohn, Berlin, 1988
- [3] SEPP, Statik ebener Platten, Handbuch, Sofistik GmbH, Oberschleißheim, 1998
- [4] Roy, A., Analysis and behaviour study of flat slabs by finite element method, Master Thesis, Indian Institut of Technology, Delhi, Indien, angefertigt an der Fachhochschule Konstanz, Referent: Prof. Dr.-Ing. H. Werkle, 1997
- [5] Werkle H., Konsistente Modellierung von Stützen bei der Finite-Element-Berechnung von Flachdecken, Bautechnik, Ernst & Sohn, Berlin, 2000 (in Vorbereitung)
- [6] Sutter, J., Finite-Element-Berechnung von Flachdecken mit Pillzkopfverstärkung, Diplomarbeit, Fachhochschule Konstanz, Referent: Prof. Dr.-Ing. H. Werkle, 2000
- [7] Werkle H., J. Sutter, Zur Berechnung regelmäßiger Flachdecken mit Pillzkopfverstärkung, (in Vorbereitung)