# Finite Elemente in der Baustatik

Einführung

**2 Stabtragwerke**

Flächentragwerke

Modellbildung

# Berechnungsverfahren der Baustatik

## Klassische Berechnungsverfahren der Baustatik

- Kraftgrößenverfahren
- Verschiebungsgrößenverfahren

## Finite-Elemente-Methode (FEM)

- Die Finite-Element-Methode ist eine Verallgemeinerung des Verschiebungsgrößenverfahrend der Baustatik in Matrizenschreibweise.
- Bei Stabtragwerken bezeichnet man sie auch als **Direkte Steifigkeitsmethode** (DSM).

# Einführungsbeispiel: ebenes Fachwerk

## Knotenpunkte

*hier:* Knotenpunkte 1- 4

## Elemente

*hier:* Fachwerkelemente 1-6

## Freiheitsgrade

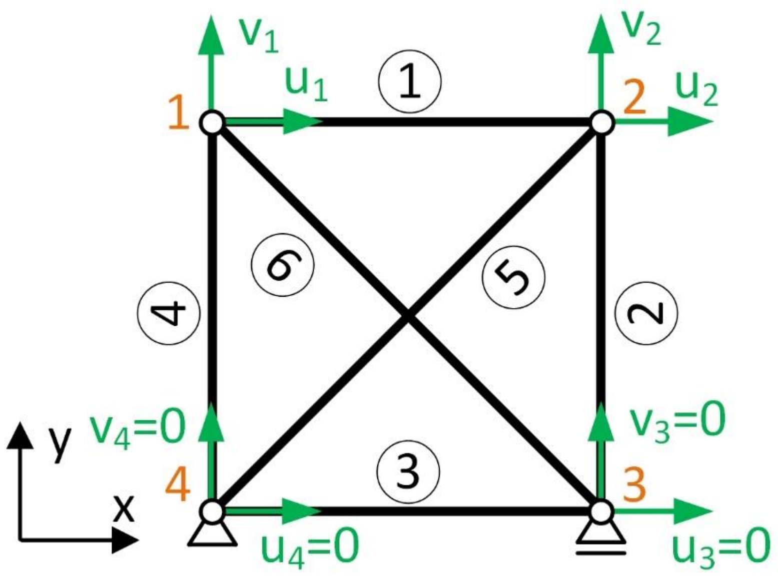
Freiheitsgrade sind voneinander unabhängige Verschiebungen oder Verdrehungen von Knotenpunkten.

*hier:* $u_1$, $v_1$, $u_2$, $v_2$, $u_3$, $v_3$ , $u_4$, $v_4$

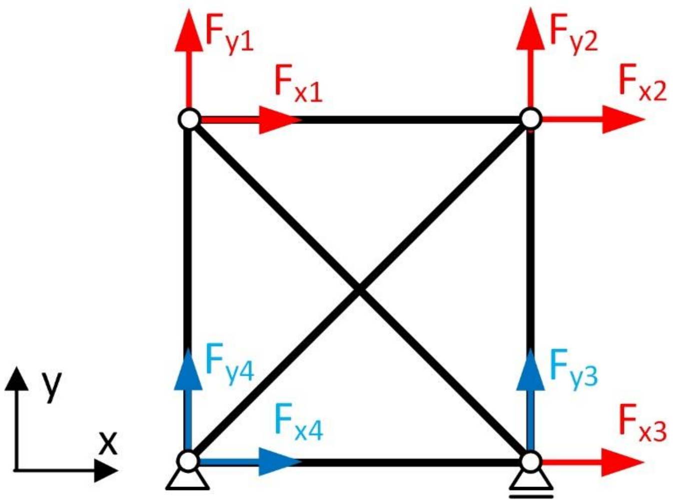
## Auflagerbedingungen

Festhaltungen einzelner Freiheitsgrade

*hier:* $v_3 = 0$ , $u_4 = 0$, $v_4 = 0$



# Einführungsbeispiel: ebenes Fachwerk




## Knotenkräfte

Äußere Kräfte

*hier:* $F_{x1}$,$F_{y1}$,$F_{x2}$, $F_{y2}$, $F_{x3}$

Auflagerkräfte

*hier:* $F_{y3}$,$F_{x4}$,$F_{y4}$

## Globales Koordinatensystem

Knotenkräfte und Knotenverschiebungen werden im globalen Koordinatensystem angegeben.

*hier:* x, y

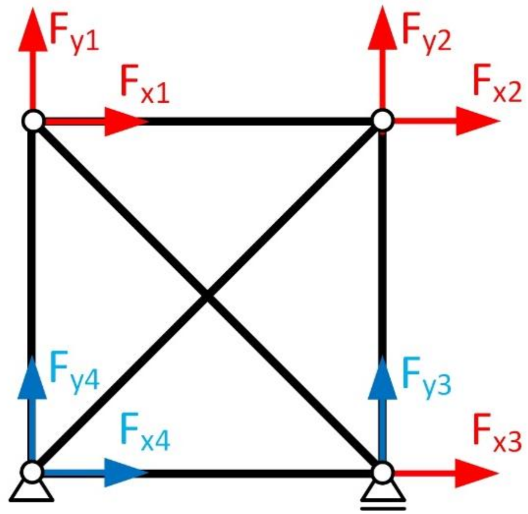
## Vorzeichenregel

Knotenkräfte und –verschiebungen sind positiv in Richtung der positiven Koordinaten des globalen Koordinatensystems.

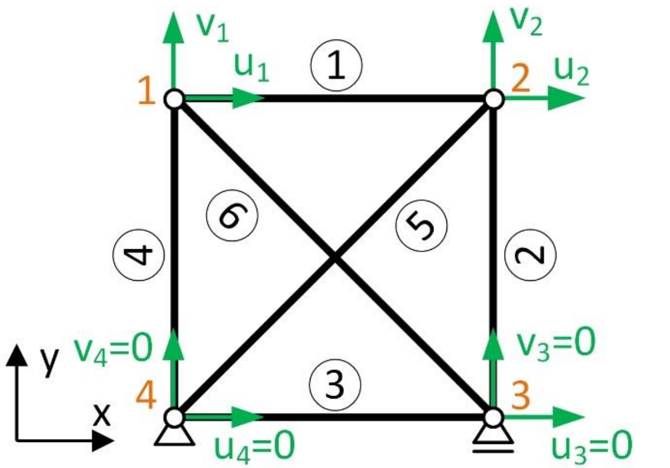
# Einführungsbeispiel: ebenes Fachwerk

## Gleichungssystem

- Die Unbekannten sind die Knotenverschiebungen. (bzw. Knotenverschiebungen und – verdrehungen).
- Die Koeffizientenmatrix heißt **Systemsteifigkeitsmatrix.**
- Die rechte Seite des Gleichungssystems bilden die Knotenkräfte, d.h. die an den Knotenpunkten angreifenden äußeren Kräfte.




$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \end{bmatrix}$$




*hier:* $v_3=u_4=v_4=0$ Wegen der Festhaltungen entfallen diese Freiheitsgrade in der Matrix.

# Systemsteifigkeitsmatrix

## Eigenschaften des Gleichungssystems

1. Bei stabilen, d.h. nicht kinematischen Systemen hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, d.h. die Systemsteifigkeitsmatrix ist regulär.
2. Diagonalterme sind immer positiv (Federkonstanten)
3. Die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch
4. Die globale Steifigkeitsmatrix wird aus den Elementsteifigkeitsmatrizen der einzelnen Elemente zusammengesetzt.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \end{bmatrix}$$

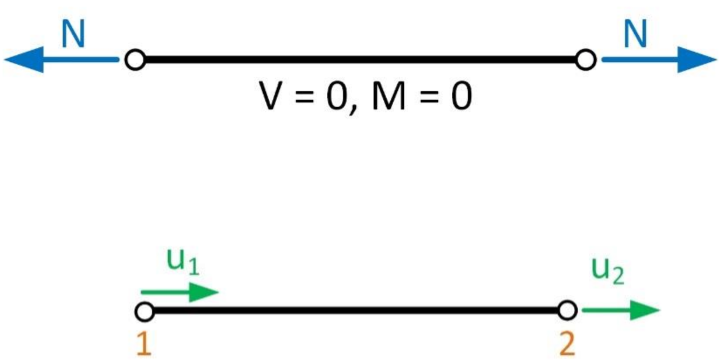
Die Lösung des Gleichungssystems ergibt die Knotenverschiebungen.

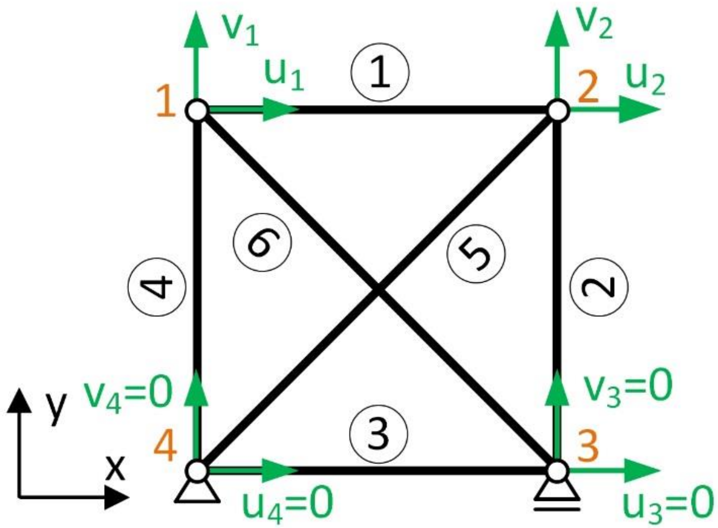
# Systemsteifigkeitsmatrix

## Schnittgrößen und Elementspannungen

Die Schnittgrößen und Elementspannungen werden ***elementweise*** mit Hilfe der Knotenverschiebungen bestimmt.

*hier:* Normalkräfte und Normalspannungen im Fachwerkelement



# Berechnungsschritte der Finite-Elemente-Methode

1. Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrizen und der Knotenkräfte.
2. Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix aus den Elementsteifigkeitsmatrizen und des globalen Lastvektors aus den äußeren, an den Knoten wirkenden Kräften.

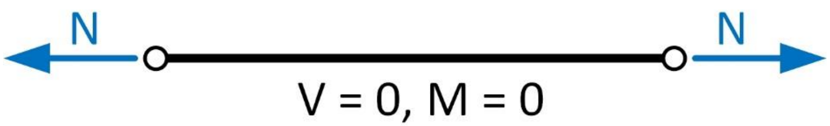
$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \end{bmatrix}$$

3. Die Lösung des Gleichungssystems ergibt die Knotenverschiebungen.
4. Bestimmung der Auflagerkräfte mit Hilfe der Knotenverschiebungen.
5. Bestimmung der Elementspannungen bzw. –schnittgrößen mit Hilfe der Knotenverschiebungen.

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Steifigkeitsmatrix in lokalen Koordinaten

**Definition:** Ein Fachwerkelement ist ein Stabelement,
das ausschließlich mit Normalkräften beansprucht wird




Schnittgröße


Knotenverschiebungen


Knotenkräfte

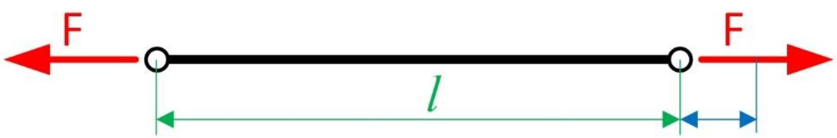
$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

**Elementsteifigkeitsmatrix**

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Herleitung der Steifigkeitsmatrix

Verlängerung eines Stabelements

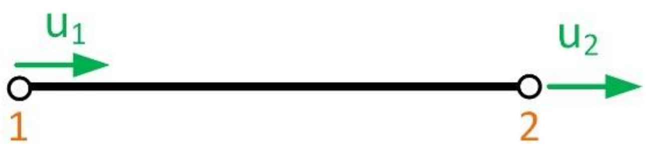



$$\delta = \varepsilon \cdot \ell = \frac{\sigma}{E} \cdot \ell = \frac{F \cdot \ell}{E \cdot A}$$

A= Querschnittsfläche
E= Elastizitätsmodul
Hooksches Gesetz:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \rightarrow \varepsilon = \sigma / E$$

Normalkraft




$$F = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \delta \quad with \quad \delta = u_2 - u_1$$

Elementkräfte

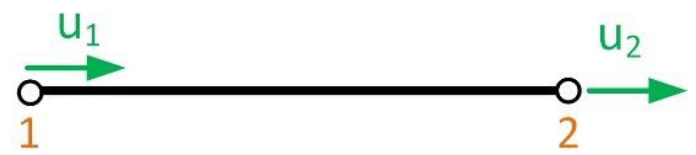

$$F_1 = -F = \frac{E \cdot A}{\ell} \left( u_1 - u_2 \right)$$

$$F_2 = F = \frac{E \cdot A}{\ell} \left( -u_1 + u_2 \right)$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Herleitung der Steifigkeitsmatrix

Elementkräfte




$$F_1 = \frac{E \cdot A}{\ell} \left( u_1 - u_2 \right)$$

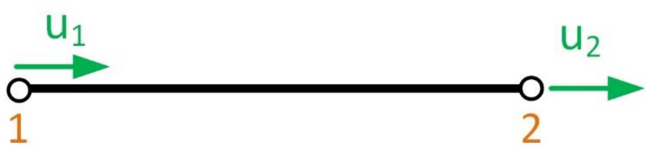

$$F_2 = \frac{E \cdot A}{\ell} \left( -u_1 + u_2 \right)$$

In Matrizenschreibweise: Elementsteifigkeitsmatrix

$$\frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements in lokalen Koordinaten





$$\frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}^{(\mathrm{lok})} \cdot \underline{u}^{(\mathrm{lok})} = \underline{F}^{(\mathrm{lok})}$$

$\underline{K}^{(\mathrm{lok})}$ = Elementsteifigkeitsmatrix

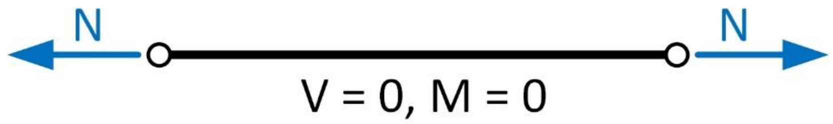
**Eigenschaften der Elementsteifigkeitsmatrix:**

- symmetrisch
- singulär, d.h. das „statische System“ ist kinematisch

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Elementschnittgrößenmatrix eines Fachwerkelements in lokalen Koordinaten

Die Elementschnittgrößen werden mit Hilfe der Elementschnittgrößenmatrix (bzw. die Elementspannungen mit Hilfe der Elementspannungsmatrix) und den – nach der Lösung des Geleichungssystems bekannten – Knotenverschiebungen berechnet.




Elementkräfte

$$N = F_2 \quad \text{mit}$$

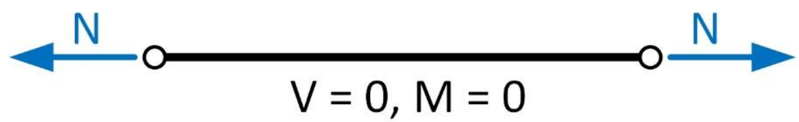

$$F_2 = \frac{E \cdot A}{\ell}\left(-u_1 + u_2\right)$$

Elementschnittgrößenmatrix

$$N = \frac{E \cdot A}{\ell}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Elementschnittgrößenmatrix eines Fachwerkelements in lokalen Koordinaten




**Normalkraft**

$$N = \frac{E \cdot A}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$N = \underline{S}^{(\text{lok})} \cdot \underline{u}^{(\text{lok})}$$

$\underline{S}^{(\text{lok})}$ **Schnittgrößenmatrix**

**Normalspannung**

$$\sigma = \frac{E}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

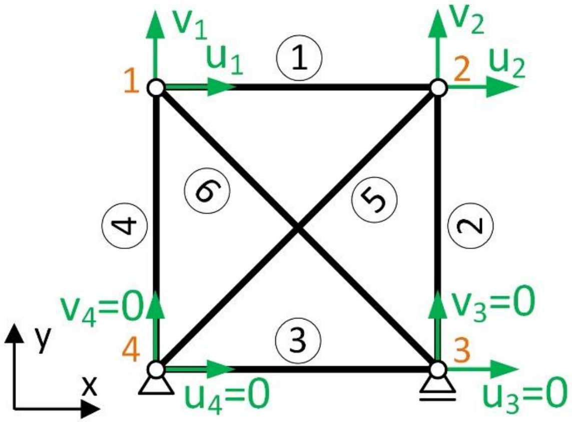
$$\sigma = \underline{S}_{\sigma}^{(\text{lok})} \cdot \underline{u}^{(\text{lok})}$$

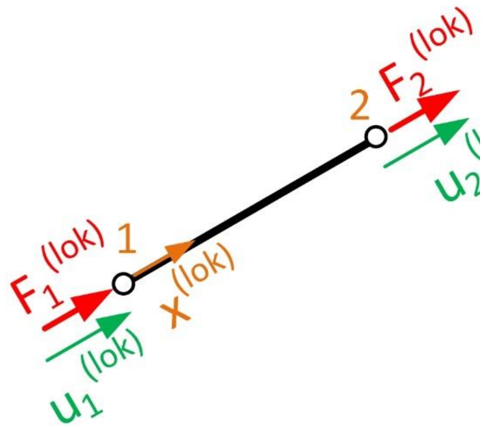
$\underline{S}_{\sigma}^{(\text{lok})}$ **Elementspannungs-matrix**

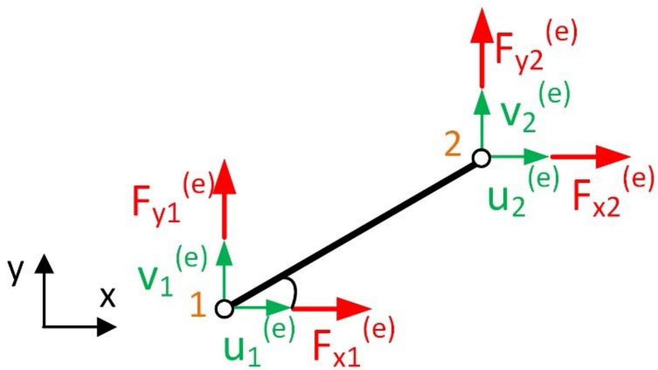
# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Koordinatentransformation

Elementkräfte und -verschiebungen in globalen and lokalen Koordinaten




Fachwerk

Element in lokalen Koodinaten

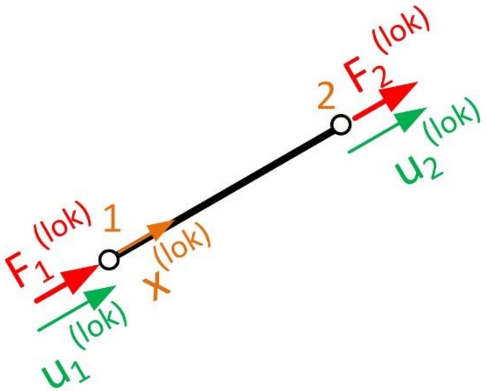
Element in globalen

Koordinaten

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

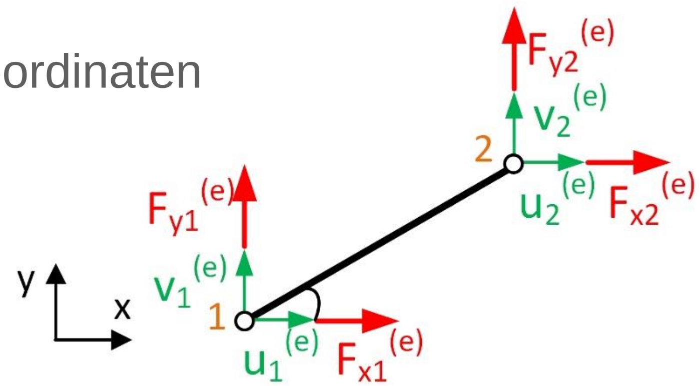
## Koordinatentransformation

Elementkräfte und –verschiebungen in lokalen Koordinaten




$$\underline{u}^{(lok)} = \begin{bmatrix} u_1^{(lok)} \\ u_2^{(lok)} \end{bmatrix} \qquad \underline{F}^{(lok)} = \begin{bmatrix} F_1^{(lok)} \\ F_2^{(lok)} \end{bmatrix}$$

Elementkräfte und –verschiebungen in globalen Koordinaten

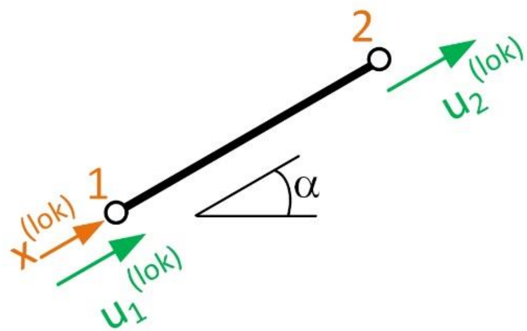


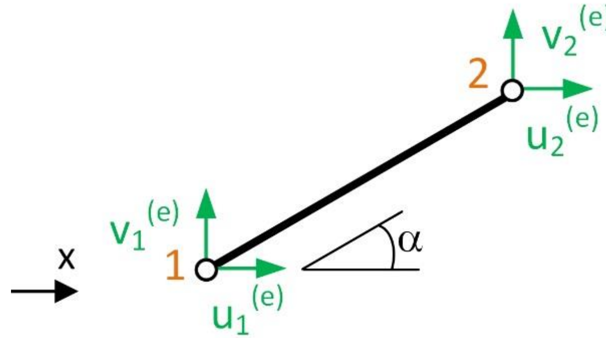

$$\underline{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \end{bmatrix} \qquad \underline{F}^{(e)} = \begin{bmatrix} F_{x1}^{(e)} \\ F_{y1}^{(e)} \\ F_{x2}^{(e)} \\ F_{y2}^{(e)} \end{bmatrix}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Koordinatentransformation: Knotenverschiebungen

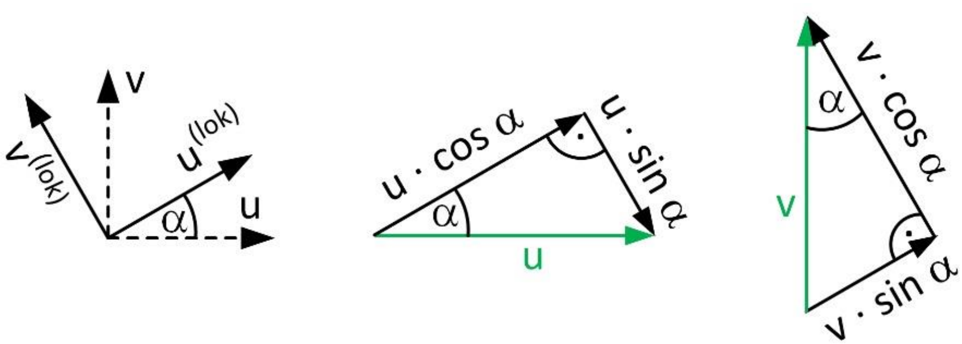
Lokale
Koordinaten
(Element)




Globale
Koordinaten
(System)

Koordinatentransformation




$$u^{(\mathrm{lok})} = u \cdot \cos\alpha + v \cdot \sin\alpha$$

$$v^{(\mathrm{lok})} = -u \cdot \sin\alpha + v \cdot \cos\alpha$$

Koordinatentransformation - Fachwerkelement

$$u_1^{(\mathrm{lok})} = u_1^{(e)} \cdot \cos\alpha + v_1^{(e)} \cdot \sin\alpha$$

$$u_2^{(\mathrm{lok})} = u_2^{(e)} \cdot \cos\alpha + v_2^{(e)} \cdot \sin\alpha$$

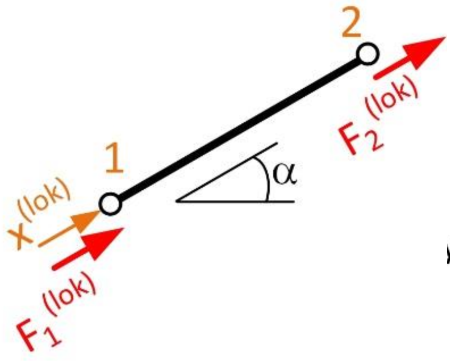
$$\begin{bmatrix} u_1^{(\mathrm{lok})} \\ u_2^{(\mathrm{lok})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

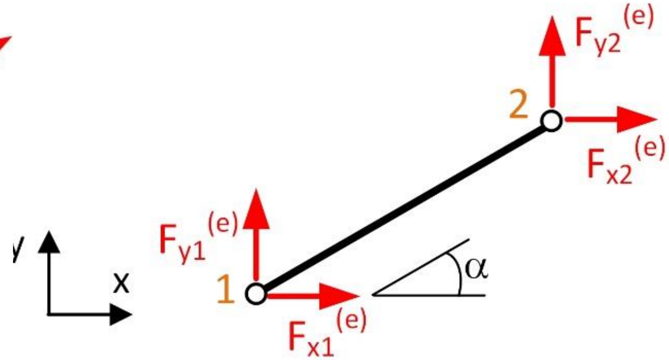
$$\underline{u}^{(\mathrm{lok})} = \underline{T} \cdot \underline{u}^{(e)}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Koordinatentransformation: Knotenkräfte

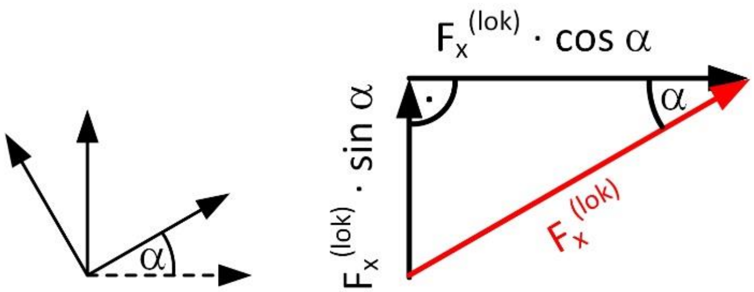
Lokale Koordinaten (Element)




Globale Koordinaten (System)

Koordinatentransformation




$$F_x = F_x^{(lok)} \cdot \cos\alpha$$

$$F_y = F_x^{(lok)} \cdot \sin\alpha$$

Koordinatentransformation - Fachwerkelement

$$F_{x1}^{(e)} = \cos\alpha \cdot F_1^{(lok)}$$

$$F_{y1}^{(e)} = \sin\alpha \cdot F_1^{(lok)}$$

$$F_{x2}^{(e)} = \cos\alpha \cdot F_2^{(lok)}$$

$$F_{y2}^{(e)} = \sin\alpha \cdot F_2^{(lok)}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} F_{x1}^{(e)} \\ F_{y1}^{(e)} \\ F_{x2}^{(e)} \\ F_{y2}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & o \\ \sin\alpha & o \\ o & \cos\alpha \\ o & \sin\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1^{(lok)} \\ F_2^{(lok)} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{F}^{(e)} = \underline{T}^{\mathsf{T}} \cdot \underline{F}^{(lok)}}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Koordinatentransformation: Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} F_1^{(lok)} \\ F_2^{(lok)} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(lok)} \\ u_2^{(lok)} \end{bmatrix}$$

Koordinatentransformation der Knotenkräfte

Substitution

$$\underline{F}^{(lok)} = \underline{K}^{(lok)} \cdot \underline{u}^{(lok)}$$

Substitution

Koordinatentransformation der Knotenverschiebungen

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^{(e)} \\ F_{y1}^{(e)} \\ F_{x2}^{(e)} \\ F_{y2}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1^{(lok)} \\ F_2^{(lok)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1^{(lok)} \\ u_2^{(lok)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}^{(e)} = \underline{T}^T \cdot \underline{F}^{(lok)}$$

$$\underline{F}^{(e)} = \underline{T}^T \cdot \underline{K}^{(lok)} \cdot \underline{T} \cdot \underline{u}^{(e)} \quad \text{or} \quad \underline{F}^{(e)} = \underline{K}^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)} \quad \text{with} \quad \underline{K}^{(e)} = \underline{T}^T \cdot \underline{K}^{(lok)} \cdot \underline{T}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Koordinatentransformation: Elementsteifigkeitsmatrix

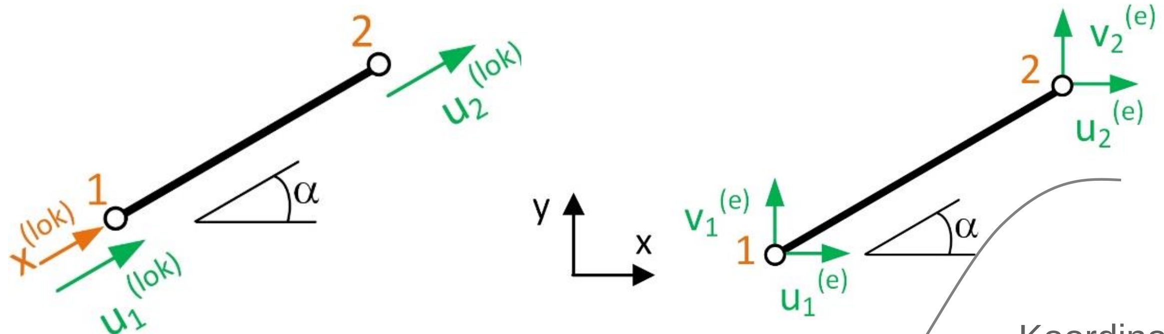
$$\begin{bmatrix} F_{x1}^{(e)} \\ F_{y1}^{(e)} \\ F_{x2}^{(e)} \\ F_{y2}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{\ell} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{bmatrix}}_{T^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{K^{(lok)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}}_{T} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}^{(e)} = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha \cdot \cos\alpha & -\cos^2\alpha & -\sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ \sin\alpha \cdot \cos\alpha & \sin^2\alpha & -\sin\alpha \cdot \cos\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\sin\alpha \cdot \cos\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ -\sin\alpha \cdot \cos\alpha & -\sin^2\alpha & \sin\alpha \cdot \cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}^{(e)} = \underline{T}^T \cdot \underline{K}^{(lok)} \cdot \underline{T} \cdot \underline{u}^{(e)} \quad \text{or} \quad \underline{F}^{(e)} = \underline{K}^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)} \quad \text{with} \quad \underline{K}^{(e)} = \underline{T}^T \cdot \underline{K}^{(lok)} \underline{T}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Koordinatentransformation: Elementschnittgrößenmatrix




$$\begin{bmatrix} u_1^{(lok)} \\ u_2^{(lok)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & o & o \\ o & o & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

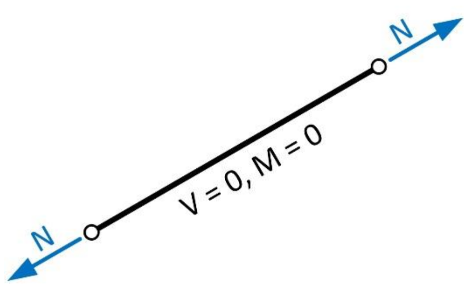
Koordinatentransformation Knotenverschiebungen

Schnittgrößenmatrix in lokalen Koordinaten

$$N = \frac{E \cdot A}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(lok)} \\ u_2^{(lok)} \end{bmatrix}$$

Schnittgrößenmatrix in globalen Koordinaten

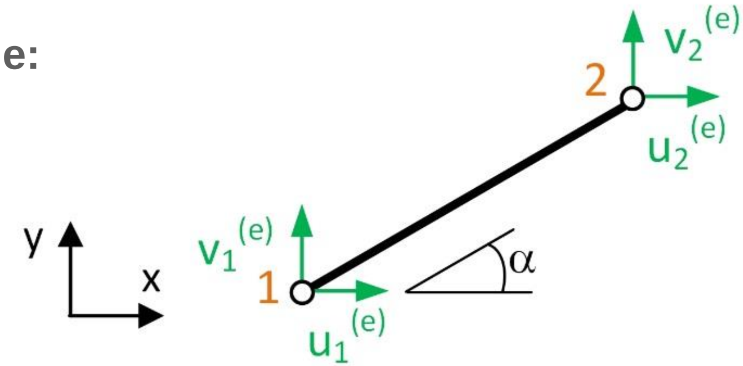
$$N = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & o & o \\ o & o & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \end{bmatrix}$$

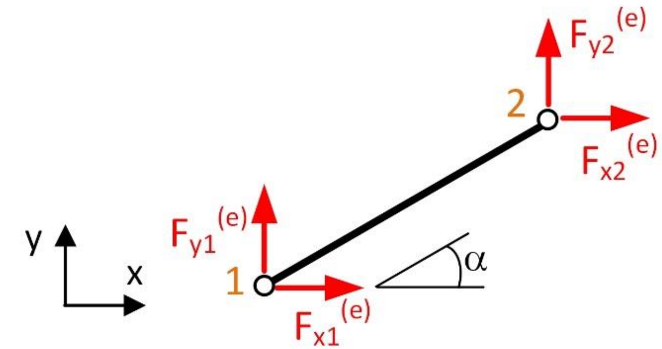



$$\boxed{N = \underline{S}^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)}}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

**Freiheitsgrade:**




**Steifigkeitsmatrix:**

$$\frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cdot\cos\alpha & -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha & \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cdot\cos\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cdot\cos\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cdot\cos\alpha & -\sin^2\alpha & \sin\alpha\cdot\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1}^{(e)} \\ F_{y1}^{(e)} \\ F_{x2}^{(e)} \\ F_{y2}^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}^{(e)} = \underline{K}^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)} \quad \mathit{with} \quad \underline{K}^{(e)} = \underline{T}^{T} \cdot \underline{K}^{(lok)}\,\underline{T}$$

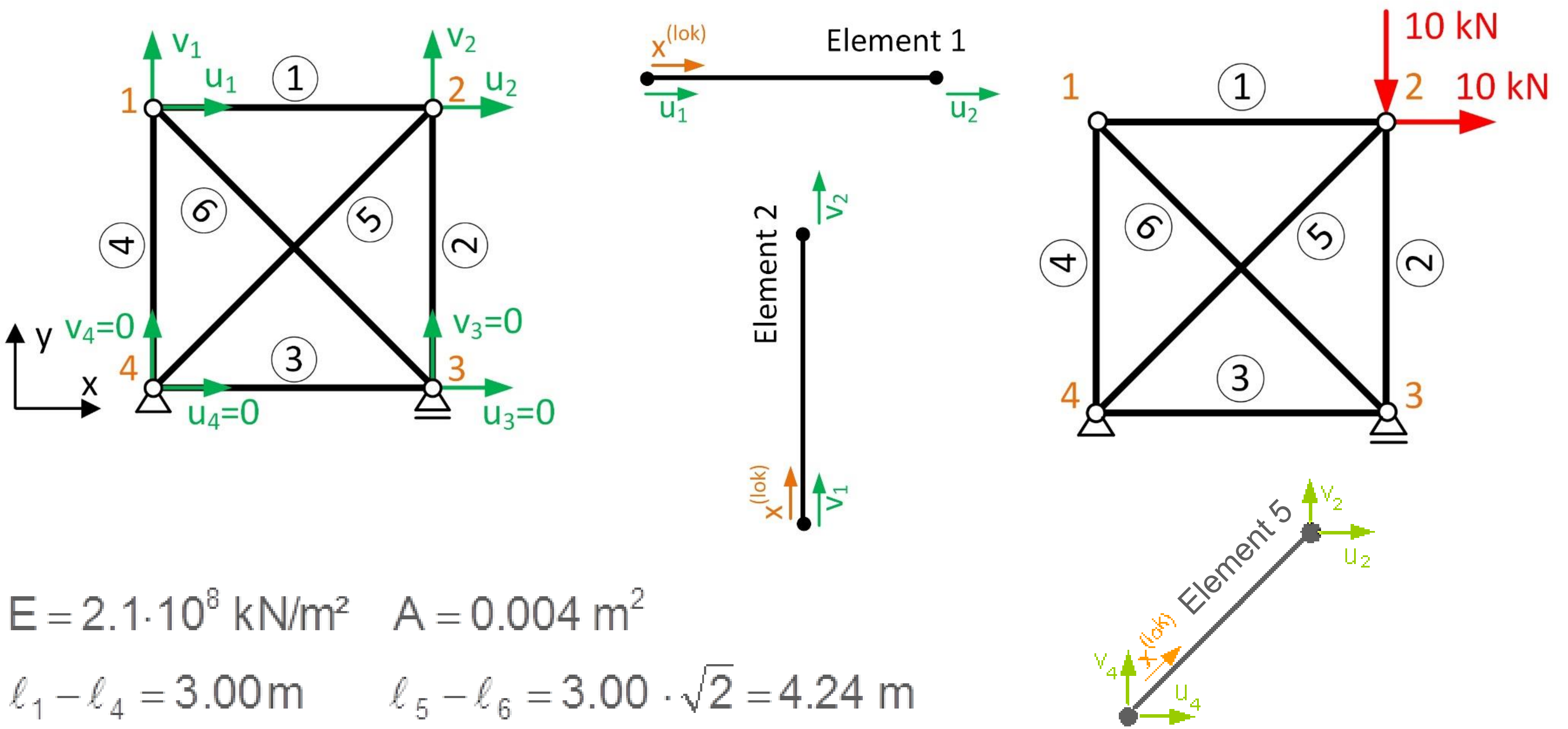
**Schnittgrößenmatrix (Normalkraft):**

$$N = \underline{S}^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)}$$

$$N = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen




$E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2 \quad A = 0.004 \text{ m}^2$

$\ell_1 - \ell_4 = 3.00\,\text{m} \qquad \ell_5 - \ell_6 = 3.00 \cdot \sqrt{2} = 4.24 \text{ m}$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen

**Element 1:** $\alpha = 0°$

$$\frac{E \cdot A}{\ell} = 2.1 \cdot 10^8 \cdot \frac{0.004}{3.00} = 2.8 \cdot 10^5$$


Element stiffness matrix


$$\begin{bmatrix} F_{x1}^{(1)} \\ F_{x2}^{(1)} \end{bmatrix} = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Element section force matrices

$$N = 2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

System

Steifigkeitsmatrix

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen

### Element 2: $\alpha = 90°$

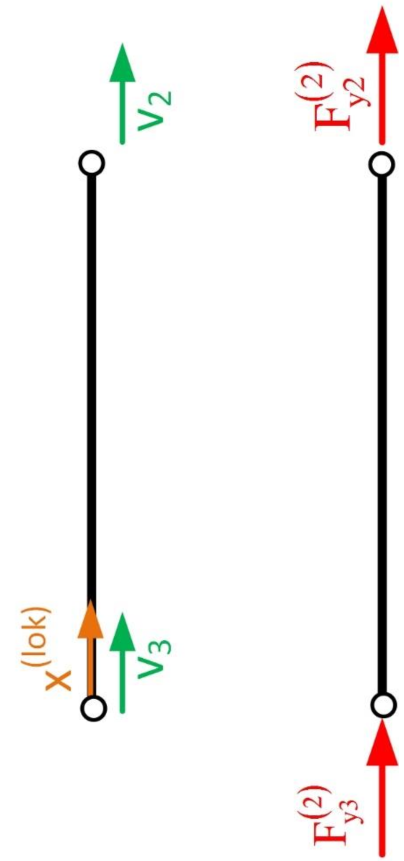
$$\frac{E \cdot A}{\ell} = 2.1 \cdot 10^8 \cdot \frac{0.004}{3.00} = 2.8 \cdot 10^5$$

Element stiffness matrix

$$\begin{bmatrix} F_{y3}^{(2)} \\ F_{y2}^{(2)} \end{bmatrix} = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_3 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Element section force matrices

$$N = 2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_3 \\ v_2 \end{bmatrix}$$




System

Steifigkeitsmatrix

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen

**Element 3:** $\alpha = 0°$


$$\frac{E \cdot A}{\ell} = 2.1 \cdot 10^8 \cdot \frac{0.004}{3.00} = 2.8 \cdot 10^5$$


Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} F_{x4}^{(3)} \\ F_{x3}^{(3)} \end{bmatrix} = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_4 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Elementschnittgrößenmatrix

$$N = 2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_4 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

System

Steifigkeitsmatrix

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen

**Element 4:** $\alpha = 90°$

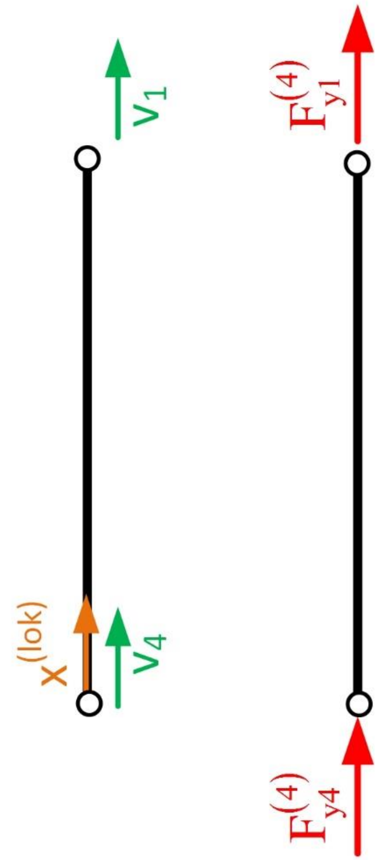
$$\frac{E \cdot A}{\ell} = 2.1 \cdot 10^8 \cdot \frac{0.004}{3.00} = 2.8 \cdot 10^5$$

Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} F_{y4}^{(4)} \\ F_{y1}^{(4)} \end{bmatrix} = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_4 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

Elementschnittgrößenmatrix

$$N = 2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_4 \\ v_1 \end{bmatrix}$$




System

Steifigkeitsmatrix

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen

**Element 5:** $\alpha = 45°$

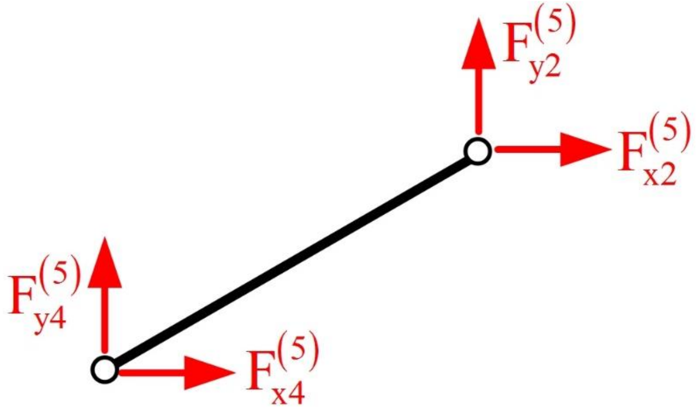
$$\frac{E \cdot A}{\ell} = 2.1 \cdot 10^8 \, \frac{0.004}{4.24} = 1.98 \cdot 10^5$$

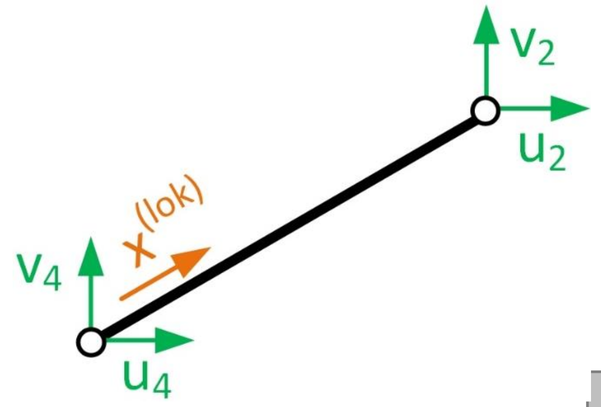
Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} F_{x4}^{(5)} \\ F_{y4}^{(5)} \\ F_{x2}^{(5)} \\ F_{y2}^{(5)} \end{bmatrix} = 1.98 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Elementschnittgrößenmatrix

$$N = 1.98 \cdot 10^5 \cdot \left[ -0.707 \;\; -0.707 \;\; 0.707 \;\; 0.707 \right] \cdot \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$




System

Steifigkeitsmatrix

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen

**Element 6:** $\alpha = 135°$

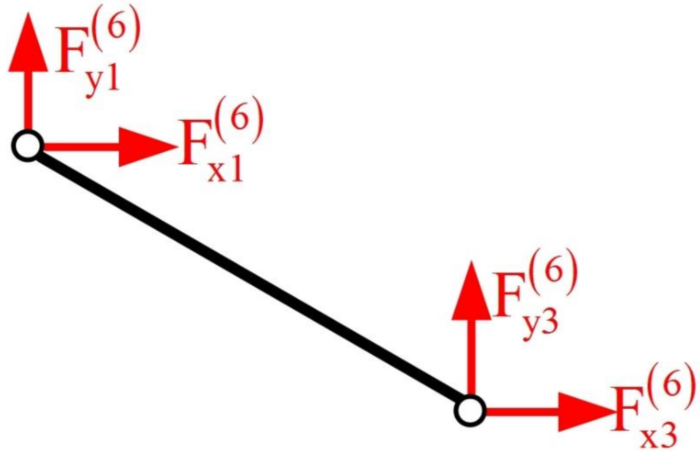
$$\frac{E \cdot A}{\ell} = 2.1 \cdot 10^8 \, \frac{0.004}{4.24} = 1.98 \cdot 10^5$$

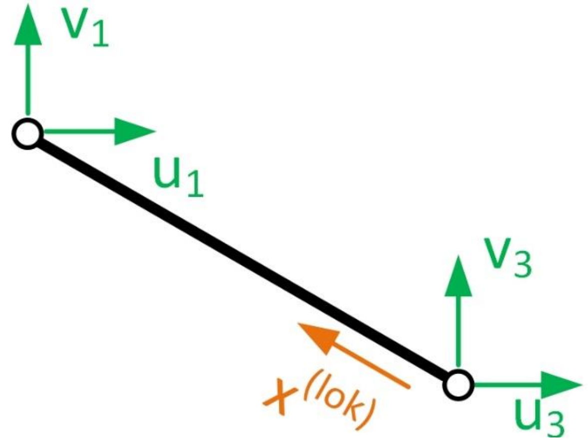
Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} F_{x3}^{(6)} \\ F_{y3}^{(6)} \\ F_{x1}^{(6)} \\ F_{y1}^{(6)} \end{bmatrix} = 1.98 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

Elementschnittgrößenmatrix

$$N = 1.98 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & -0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$




System

Steifigkeits matrix

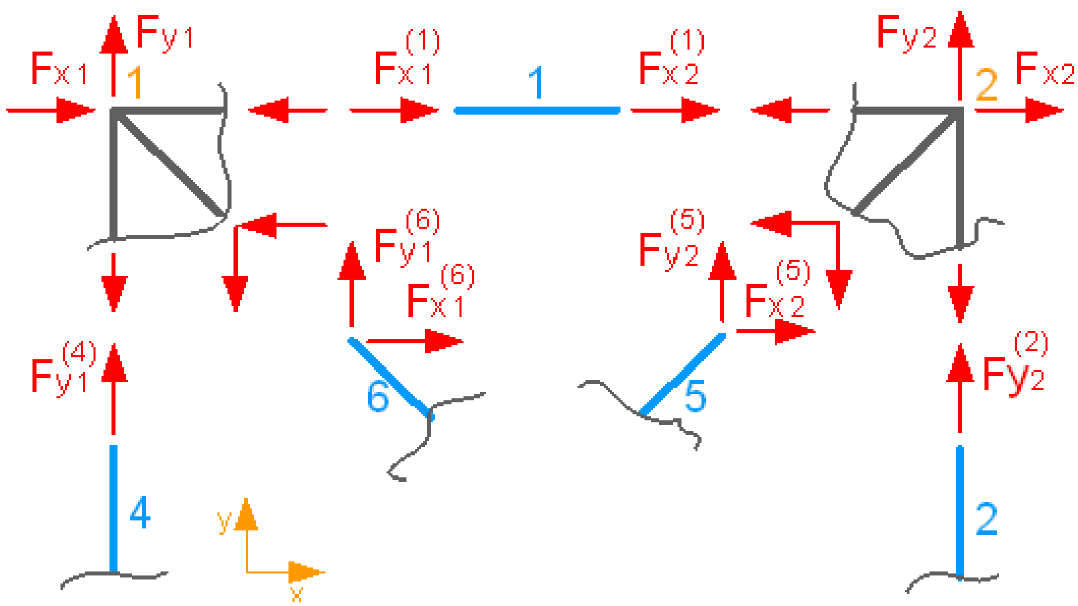
# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix

Die Systemsteifigkeitsmatrix wird aus den Elementsteifigkeitsmatrizen zusammengesetzt.

### Kompatibilitätsbedingungen

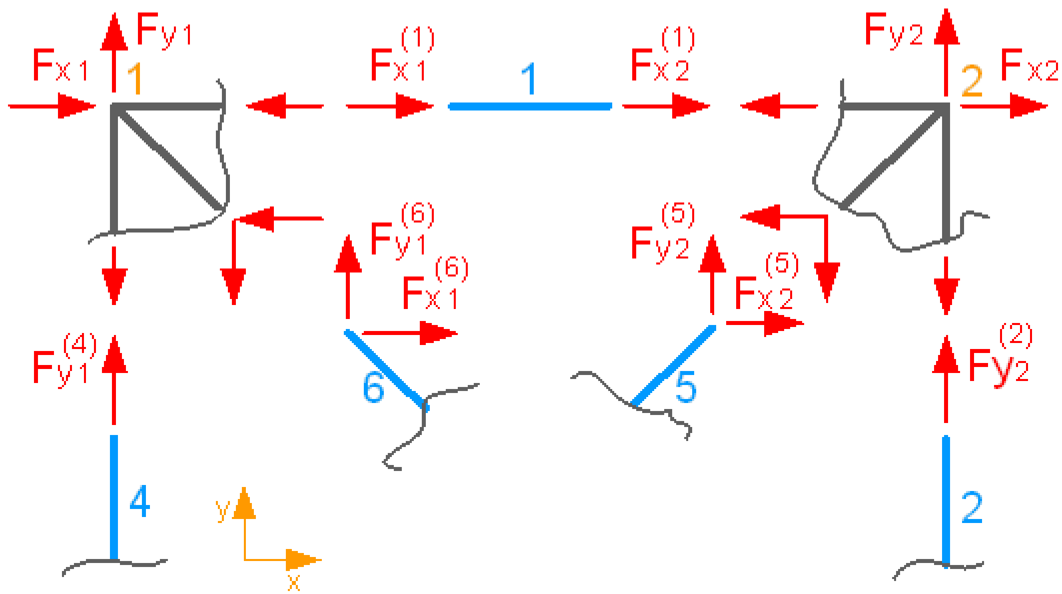
- Gleichgewichtsbedingungen müssen an allen Knoten eingehalten werden
- Kompatibilität der Elementverschiebungen muss an allen Knoten eingehalten sein.



# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix

**Einführungs-beispiel**




**Gleichgewicht am Knotenpunkt 1:**

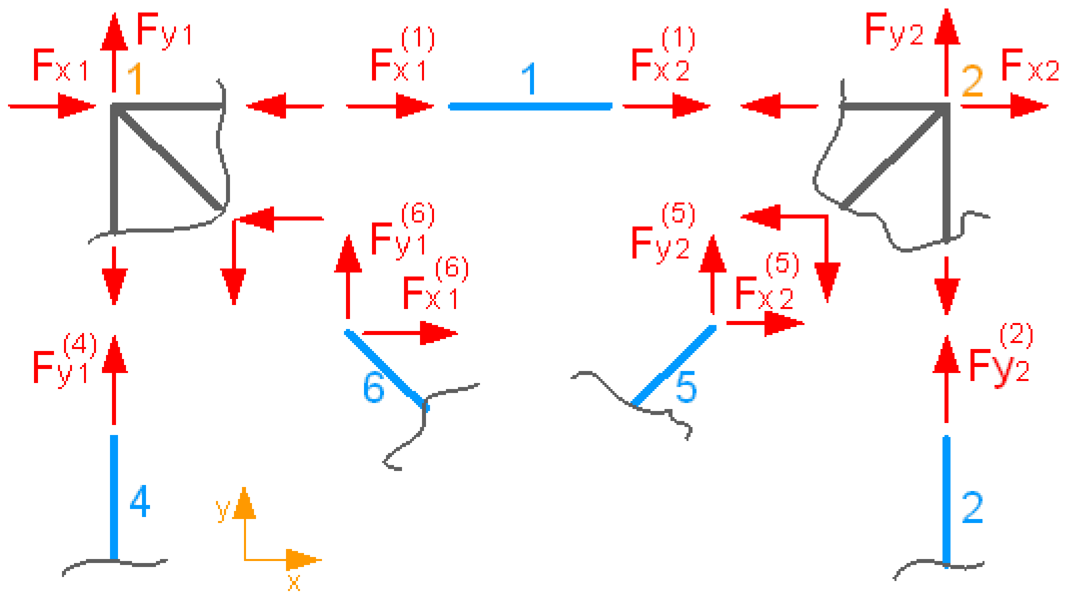
$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_{x1}^{(1)} + \qquad F_{x1}^{(6)} = F_{x1} \quad (1a)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow \qquad F_{y1}^{(4)} + F_{y1}^{(6)} = F_{y1} \quad (1b)$$

# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix

**Einführungs-beispiel**




**Gleichgewicht am Knotenpunkt 2:**

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_{x2}^{(1)} + \qquad F_{x2}^{(5)} = F_{x2} \quad (2a)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow \qquad F_{y2}^{(2)} + F_{y2}^{(5)} = F_{y2} \quad (2b)$$

# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix

Knotenpunkt 1 →

$$\sum_i F_{x1}^{(i)} = F_{x1}$$

$$\sum_i F_{y1}^{(i)} = F_{y1}$$

$$\vdots$$

Knotenpunkt n →

$$\sum_n F_{yn}^{(i)} = F_{yn}$$

$$\Rightarrow \sum \begin{bmatrix} F_{x1}^{(i)} \\ F_{y1}^{(i)} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ F_{yn}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ F_{yn} \end{bmatrix}$$

$$\sum_i \underline{F}^{(i)} = \underline{F}$$

Elementkräfte der Fachwerkelemente

Äußere Kräfte (Lasten)

Elementkräfte

Äußere Kräfte (Lasten)

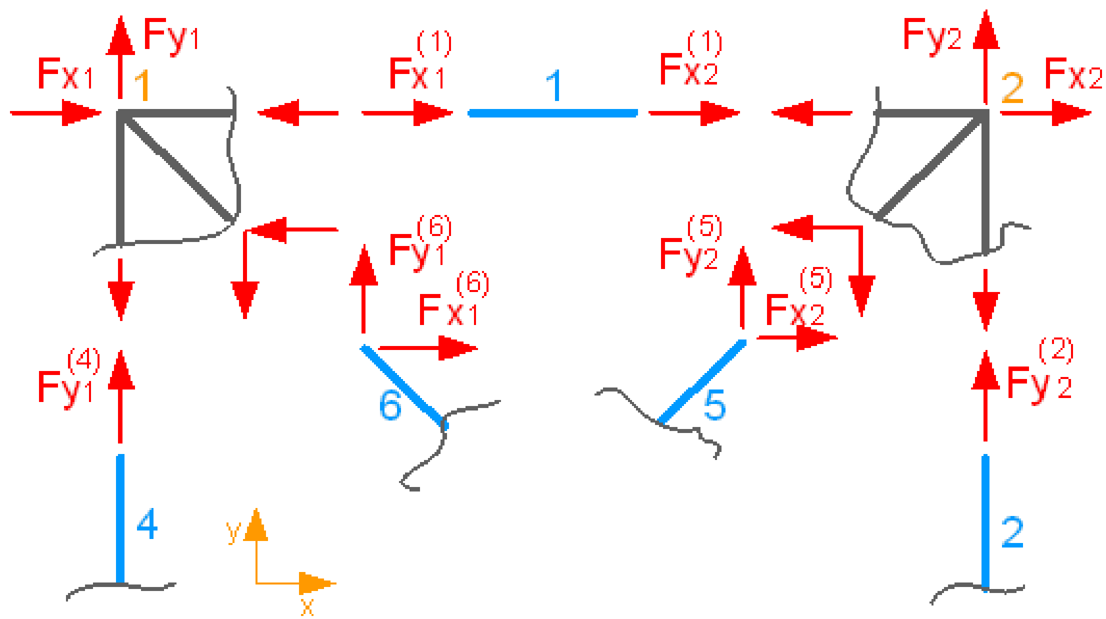
## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix

Die Elementkräfte werden durch die Elementsteifigkeitsmatrizen ausgedrückt.

### Einführungsbeispiel

Element-kräfte am Knotenpunkt 1: Element 1, Element 4, Element 6

Element-kräfte am Knotenpunkt 2: Element 1, Element 2, Element 5



# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix

The element stiffness matrices are expanded with zeroes for all degrees of freedom of the system.

Introductory example, element 1: $2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1}^{(1)} \\ F_{x2}^{(1)} \end{bmatrix}$ $\qquad \underline{K}^{(1)} \cdot \underline{u} = \underline{F}^{(1)}$

$$
2.8 \cdot 10^5 \cdot
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c}
u \\
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}
\end{array}
=
\begin{bmatrix} F_{x1}^{(1)} \\ F_{y1}^{(1)} \\ F_{x2}^{(1)} \\ F_{y2}^{(1)} \\ F_{x3}^{(1)} \\ F_{y3}^{(1)} \\ F_{x4}^{(1)} \\ F_{y4}^{(1)} \end{bmatrix}
$$

$$\hat{\underline{K}}^{(1)} \cdot \underline{u} = \hat{\underline{F}}^{(1)}$$

Element 1

# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix

Die Elementsteifigkeitsmatrizen werden mit Nullen für alle Freiheitsgrade des Systems erweitert.

Einführungsbeispiel, Element 2:

$$\begin{bmatrix} F_{y3}^{(2)} \\ F_{y2}^{(2)} \end{bmatrix} = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_3 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{K}^{(2)} \cdot \underline{u} = \underline{F}^{(2)}$$

$$2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1.0} & 0 & -\mathbf{1.0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1.0} & 0 & \mathbf{1.0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1}^{(2)} \\ F_{y1}^{(2)} \\ F_{x2}^{(2)} \\ F_{y2}^{(2)} \\ F_{x3}^{(2)} \\ F_{y3}^{(2)} \\ F_{x4}^{(2)} \\ F_{y4}^{(2)} \end{bmatrix} \qquad \underline{\hat{K}}^{(2)} \cdot \underline{u} = \underline{\hat{F}}^{(2)}$$

Element 2

# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix

Erweiterte Matrix für Element **i** : $\underline{\hat{F}}^{(i)} = \underline{\hat{K}}^{(i)} \cdot \underline{u}$

Summe über alle Elemente: $\sum_i \underline{\hat{F}}^{(i)} = \underline{F}$ $\sum \underline{\hat{K}}^{(i)} \cdot \underline{u} = \underline{F}$

Elementkräfte

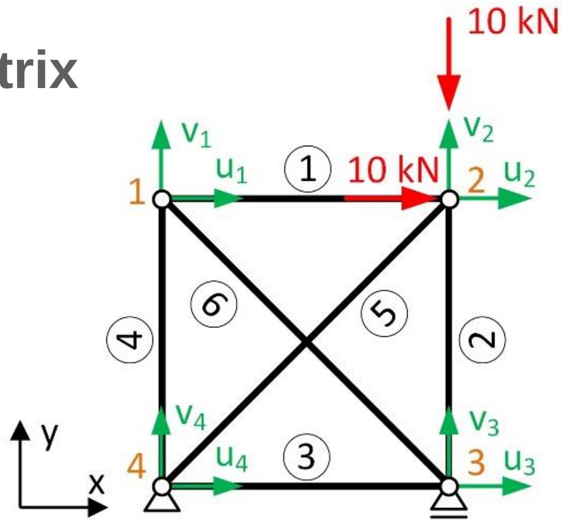
Äußere Kräfte (Lasten)

Systemsteifigkeitsmatrix $\underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{F} \quad \text{with} \quad \underline{K} = \sum \underline{\hat{K}}^{(i)}$

Die Systemsteifigkeitsmatrix wird aus den Elementsteifigkeitsmatrizen zusammengesetzt. Dazu werden die Koeffizienten der Elementsteifigkeitsmatrizen an denjenigen Stellen (entsprechende Reihe und Spalte), die den globalen Freiheitsgraden entsprechen, addiert.

# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix




### Element 1

$$
\begin{bmatrix} F_{x1}^{(1)} \\ F_{x2}^{(1)} \end{bmatrix} = 2.80\cdot 10^5 \cdot
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
\cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}
$$

$$
2.8\cdot 10^5 \cdot
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}
$$

Element 1

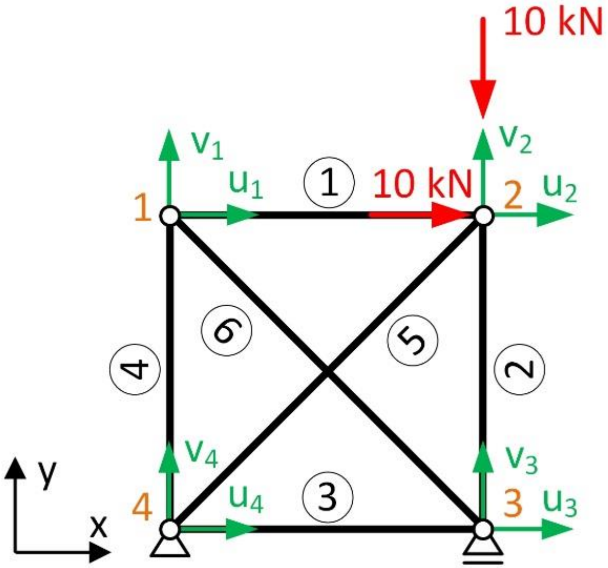
# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix

### Element 2

$$\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} F_{y3}^{(2)} \\ F_{y2}^{(2)} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ =2.80 \cdot 10^5 \cdot \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_3 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \cdot \begin{bmatrix} v_3 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}$$




Element 2

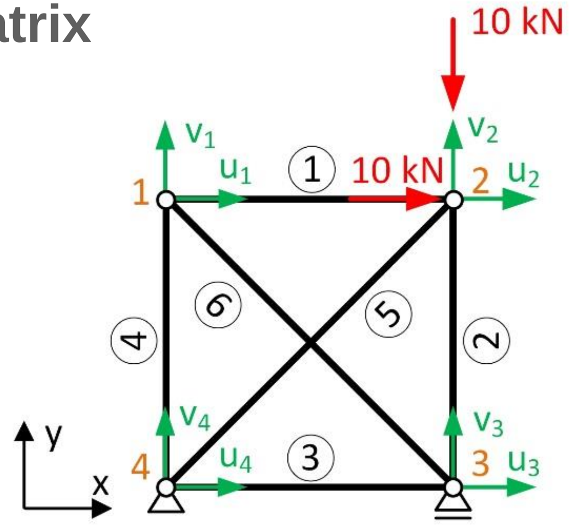
# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix

### Element 3

$$\begin{bmatrix} F_{x4}^{(3)} \\ F_{x3}^{(3)} \end{bmatrix} = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{array}{cc} u_4 & u_3 \\ \left[\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right] \end{array} \cdot \begin{bmatrix} u_4 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ \left[\begin{matrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right] \end{array} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}$$




Element 3

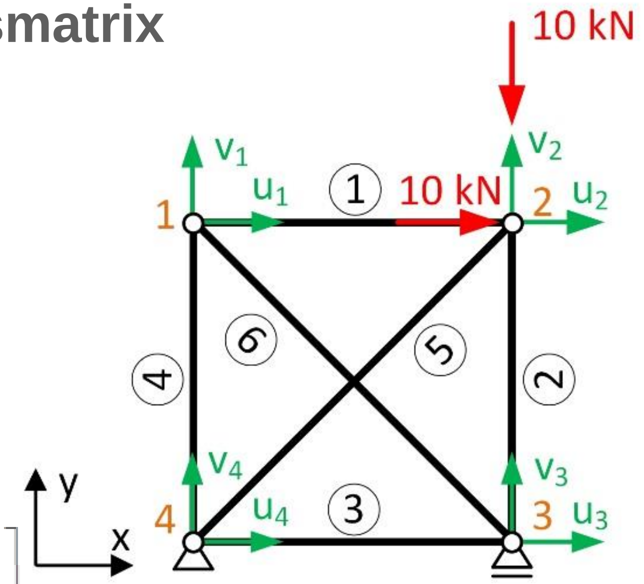
# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix

### Element 4

$$\begin{bmatrix} F_{y4}^{(4)} \\ F_{y1}^{(4)} \end{bmatrix} = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_4 & v_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} v_4 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

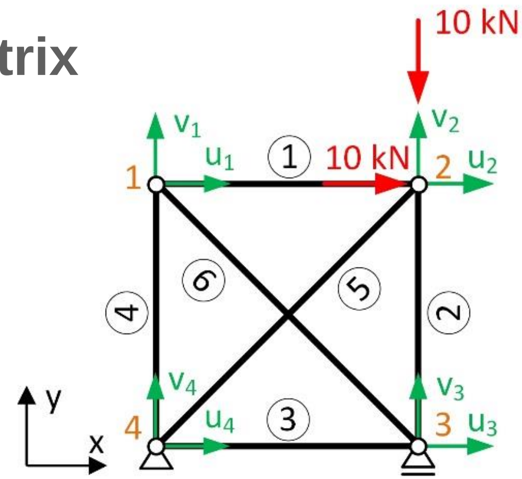
$$2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}$$




Element 4

# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix




### Element 5:

$$
\begin{bmatrix} F_{x4}^{(5)} \\ F_{y4}^{(5)} \\ F_{x2}^{(5)} \\ F_{y2}^{(5)} \end{bmatrix} = 2.8\cdot10^5 \cdot
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_4 & v_4 & u_2 & v_2 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0.35 & 0.35 & -0.35 & -0.35 \\ 0.35 & 0.35 & -0.35 & -0.35 \\ -0.35 & -0.35 & 0.35 & 0.35 \\ -0.35 & -0.35 & 0.35 & 0.35 \end{bmatrix} \end{array}
\cdot \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}
$$

$$
2.8\cdot10^5 \cdot
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 \\
-1.0 & 0 & 1+0.35 & 0.35 & 0 & 0 & -0.35 & -0.35 \\
0 & 0 & 0.35 & 1+0.35 & 0 & -1.0 & -0.35 & -0.35 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.35 & -0.35 & -1.0 & 0 & 1+0.35 & 0.35 \\
0 & -1.0 & -0.35 & -0.35 & 0 & 0 & 0.35 & 1+0.35
\end{bmatrix} \end{array}
\cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}
$$

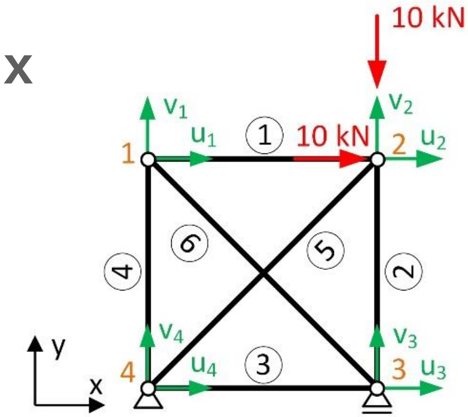
Element 5

# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix

### Element 6:

$$\begin{bmatrix} F_{x3}^{(6)} \\ F_{y3}^{(6)} \\ F_{x1}^{(6)} \\ F_{y1}^{(6)} \end{bmatrix} = 2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_3 & v_3 & u_1 & v_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.35 & -0.35 & -0.35 & 0.35 \\ -0.35 & 0.35 & 0.35 & -0.35 \\ -0.35 & 0.35 & 0.35 & -0.35 \\ 0.35 & -0.35 & -0.35 & 0.35 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$




Element 6

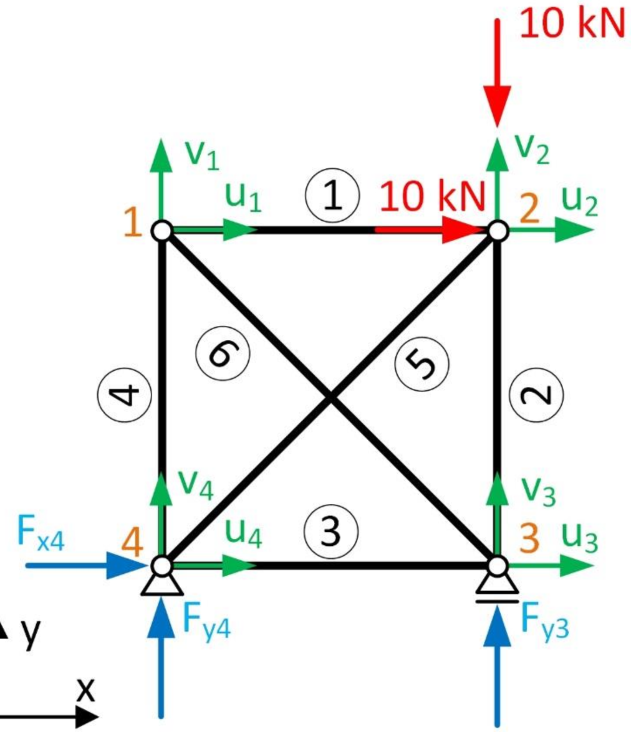
$$2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1+0.35 & -0.35 & -1.0 & 0 & -0.35 & 0.35 & 0 & 0 \\ -0.35 & 1+0.35 & 0 & 0 & 0.35 & -0.35 & 0 & -1.0 \\ -1.0 & 0 & 1.35 & 0.35 & 0 & 0 & -0.35 & -0.35 \\ 0 & 0 & 0.35 & 1.35 & 0 & -1.0 & -0.35 & -0.35 \\ -0.35 & 0.35 & 0 & 0 & 1+0.35 & -0.35 & -1.0 & 0 \\ 0.35 & -0.35 & 0 & -1.0 & -0.35 & 1+0.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.35 & -0.35 & -1.0 & 0 & 1.35 & 0.35 \\ 0 & -1.0 & -0.35 & -0.35 & 0 & 0 & 0.35 & 1.35 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}$$

# Systemsteifigkeitsmatrix

## Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix

### Lastvektor

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10. \\ -10. \\ 0 \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}$$



# Systemsteifigkeitsmatrix

## Systemsteifigkeitsmatrix ohne Festhaltungen - Einführungsbeispiel

$$
2.8 \cdot 10^5 \cdot
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{1.35} & \boldsymbol{-0.35} & \boldsymbol{-1.0} & 0 & \boldsymbol{-0.35} & 0.35 & 0 & 0 \\
\boldsymbol{-0.35} & \boldsymbol{1.35} & 0 & 0 & \boldsymbol{0.35} & -0.35 & 0 & -1.0 \\
\boldsymbol{-1.0} & 0 & \boldsymbol{1.35} & \boldsymbol{0.35} & 0 & 0 & -0.35 & -0.35 \\
0 & 0 & \boldsymbol{0.35} & \boldsymbol{1.35} & 0 & -1.0 & -0.35 & -0.35 \\
\boldsymbol{-0.35} & \boldsymbol{0.35} & 0 & 0 & \boldsymbol{1.35} & -0.35 & -1.0 & 0 \\
0.35 & -0.35 & 0 & -1.0 & -0.35 & 1.35 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.35 & -0.35 & -1.0 & 0 & 1.35 & 0.35 \\
0 & -1.0 & -0.35 & -0.35 & 0 & 0 & 0.35 & 1.35
\end{bmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ -10 \\ 0 \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}
$$

### Eigenschaften der Steifigkeitsmatrix

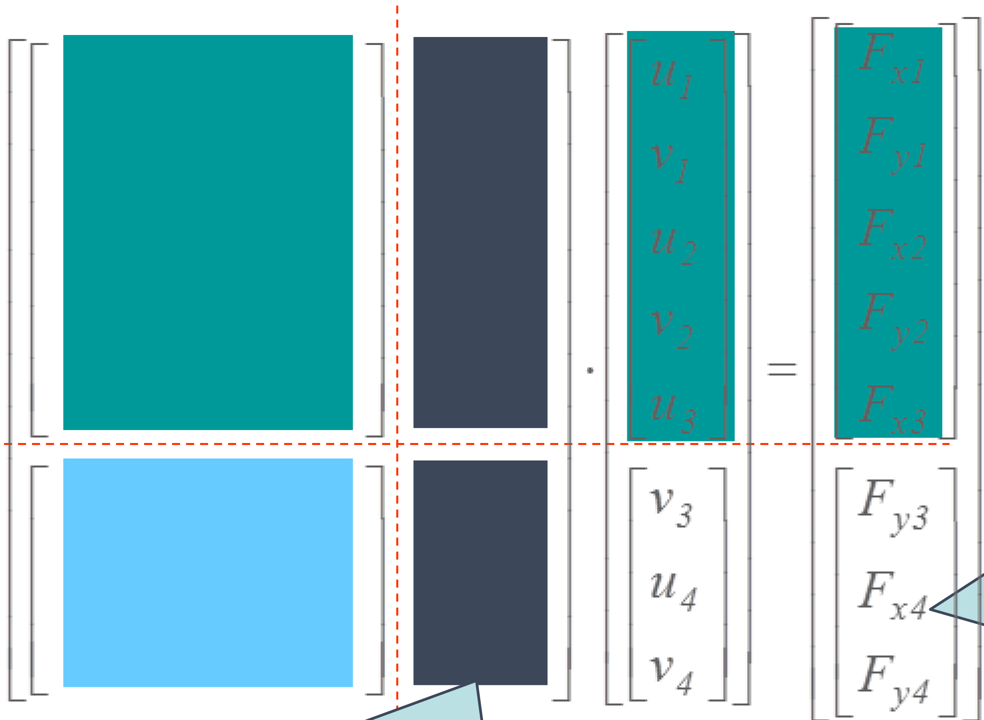
- symmetrisch (zusammengesetzt aus symmetrischen Elementmatrizen)
- singulär, da das statische System (noch) kinematisch ist

System

# Systemsteifigkeitsmatrix

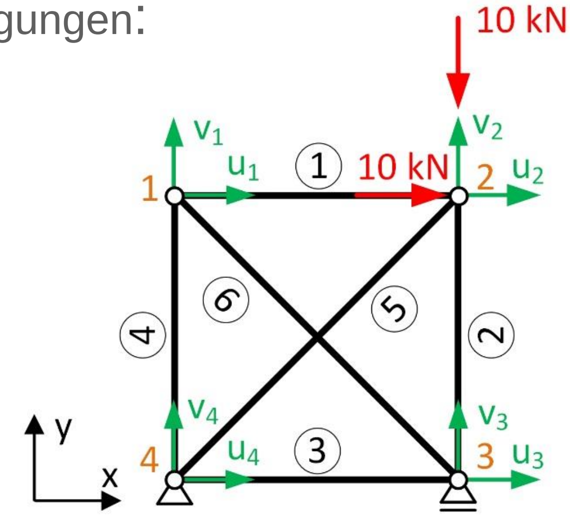
## Berücksichtigung der Lagerbedingungen

### Einführungbeispiel




Lagerbedingungen:

$v_3 = 0$
$u_4 = 0$
$v_4 = 0$




Spalten werden mit 0 multipliziert und können daher weggelassen werden.

Unbekannte Auflagerkräfte

$\Rightarrow$ Reihen (d.h. Gleichungen) werden im globalen Gleichungssystem weggelassen

$\Rightarrow$ Reihen werden später verwendet, um die Auflagerkräfte zu bestimmen.

# Systemsteifigkeitsmatrix

## Steifigkeitsmatrix mit Berücksichtigung der Auflagerbedingungen

### Gleichungssystem zur Berechnung der Verschiebungen

$$2.8\cdot 10^{5}\cdot\begin{bmatrix} 1.35 & -0.35 & -1.0 & 0 & -0.35 \\ -0.35 & 1.35 & 0 & 0 & 0.35 \\ -1.0 & 0 & 1.35 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 & 1.35 & 0 \\ -0.35 & 0.35 & 0 & 0 & 1.35 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eigenschaften der Systemsteifigkeitsmatrix:

- regulär
- symmetrisch

### Gleichungen zur Ermittlung der Auflagerkräfte

$$2.80\cdot 10^{5}\cdot\begin{bmatrix} 0.35 & -0.35 & 0 & -1.0 & -0.35 \\ 0 & 0 & -0.35 & -0.35 & -1.0 \\ 0 & -1.0 & -0.35 & -0.35 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}$$

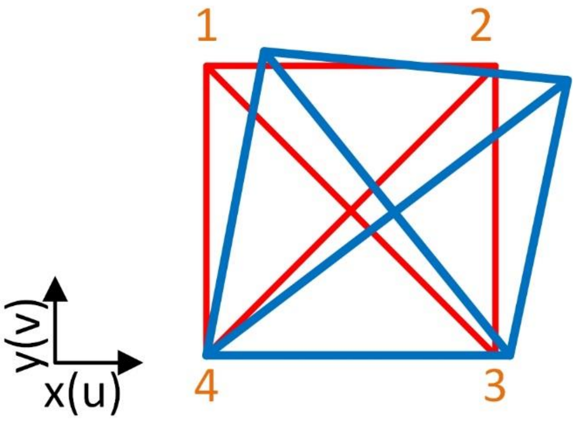
Die Auflagerkräfte erfüllen stets die Gleichgewichtsbedingungen mit den Knotenkräften und damit auch mit den äußeren Kräften (Lasten).

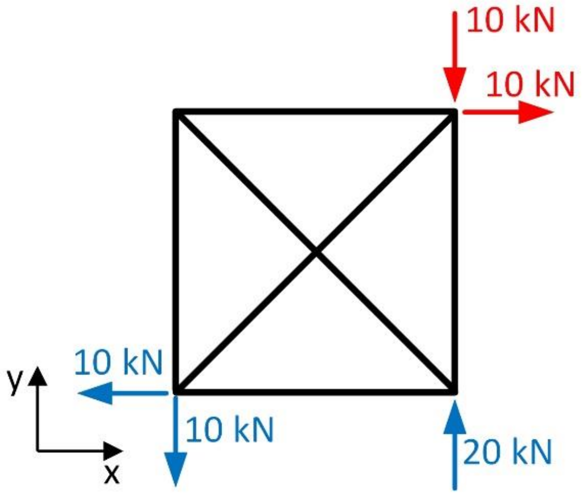
# Einführungsbeispiel: ebenes Fachwerk

## Ergebnisse

### Knotenverschiebungen:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.86 \\ 0.18 \\ 1.04 \\ -0.54 \\ 0.18 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$




### Auflagerkräfte:

$$2.80 \cdot 10^{5} \cdot \begin{bmatrix} 0.35 & -0.35 & 0 & -1. & -0.35 \\ 0 & 0 & -0.35 & -0.35 & -1. \\ 0 & -1. & -0.35 & -0.35 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.86 \\ 0.18 \\ 1.04 \\ -0.54 \\ 0.18 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{bmatrix} 20.0 \\ -10.0 \\ -10.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix} [kN]$$

Gleichgewichtskontrolle

# Einführungsbeispiel: ebenes Fachwerk

## Ergebnisse

### Schnittgrößen:

Element 1: Element 1

$$N_1 = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -1. & 1. \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.86 \\ 1.04 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} = 5.0$$

Element2: Element 2

$$N_2 = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -1. & 1. \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.00 \\ -0.54 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} = -15.0$$

Element 3: Element 3

$$N_3 = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -1. & 1. \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.18 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} = 5.0$$

Element 4: Element 4

$$N_4 = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -1. & 1. \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.18 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} = 5.0$$

Element 5: Element 5

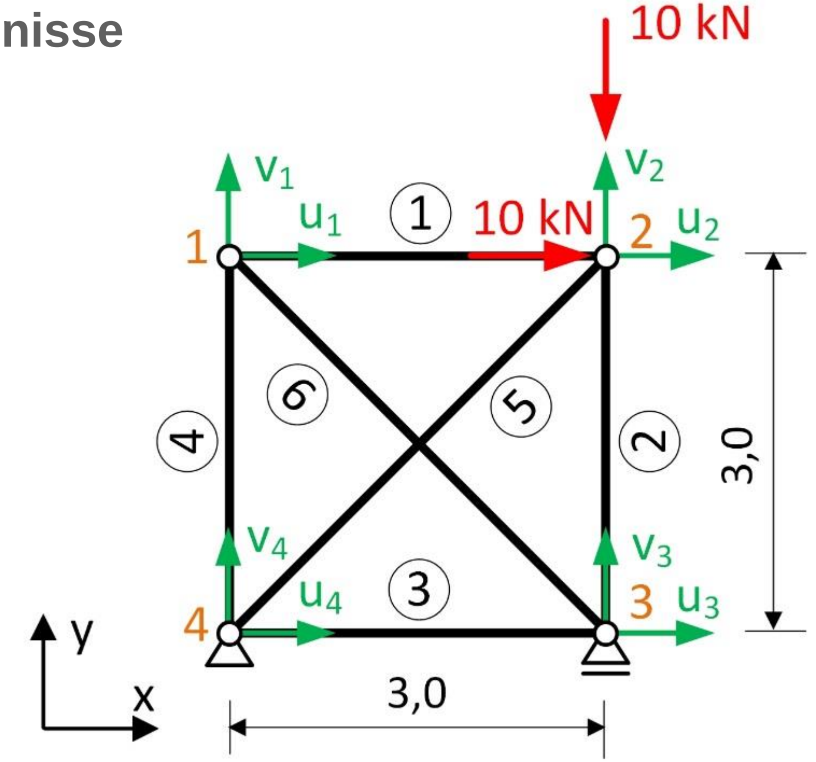
$$N_5 = 1.98 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -0.71 & -0.71 & 0.71 & 0.71 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 1.04 \\ -0.54 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} = 7.0$$

Element 6: Element 6

$$N_6 = 1.98 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 0.71 & -0.71 & -0.71 & 0.71 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.00 \\ 0.86 \\ 0.18 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} = -7.0$$

# Einführungsbeispiel: ebenes Fachwerk

## Ergebnisse




### Knotenverschiebungen

| Node | u [mm] | v [mm] |
|---|---|---|
| 1 | 0.086 | 0.018 |
| 2 | 0.104 | -0.054 |
| 3 | 0.018 | 0 |
| 4 | 0 | 0 |

### Element-schnittgrößen

| Element | N [kN] |
|---|---|
| 1 | 5.0 |
| 2 | -15.0 |
| 3 | 5.0 |
| 4 | 5.0 |
| 5 | 7.0 |
| 6 | -7.0 |

### Auflagerkräfte

| Node | $F_x$ [kN] | $F_y$ [kN] |
|---|---|---|
| 3 | - | 20 |
| 4 | -10 | -10 |

# FEM für Stabtragwerke

## Schlussfolgerungen

- Elemente müssen mit den entsprechenden Knoten verbunden sein.
- Kinematische Systeme führen zu Gleichungssystemen, die nicht lösbar sind.
  Mögliche Programmmeldungen sind: Steifigkeitsmatrix ist singulä, Determinate Null, kinematisches System. Möglich ist auch ein Programmabsturz.
- Steifigkeitskennwerte wie Querschnittsflächen, Trägheitsmomente (bei biegebeanspruchten Balken) u.s.w. müssen immer angegeben werden, damit das Programm entsprechende Elementsteifigkeitsmatrizen aufstellen kann.
- Die Auflagerkräfte erfüllen stets das Gleichgewicht mit den äußeren Kräften.

Beispiel 1

Beispiel 2

Beispiel 3

# Ende

Einführung

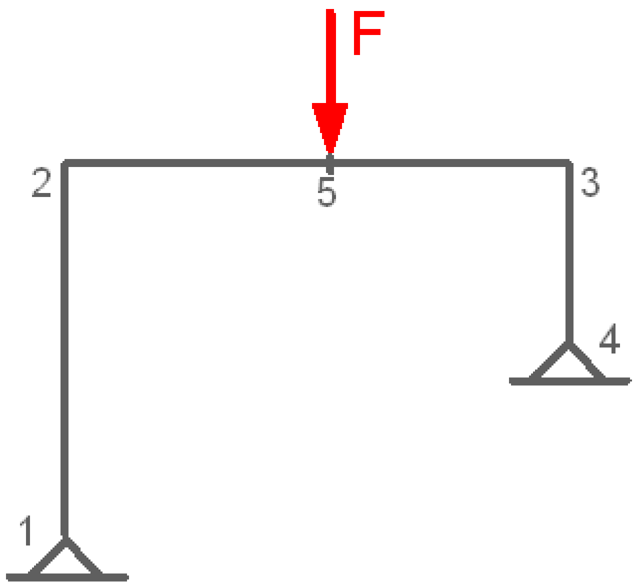
**2 Stabtragwerke**

Flächentragwerke

Modellbildung

# FEM für Stabtragwerke

## Beispiele für fehlerhafte Systemeingaben – Beispiel 1

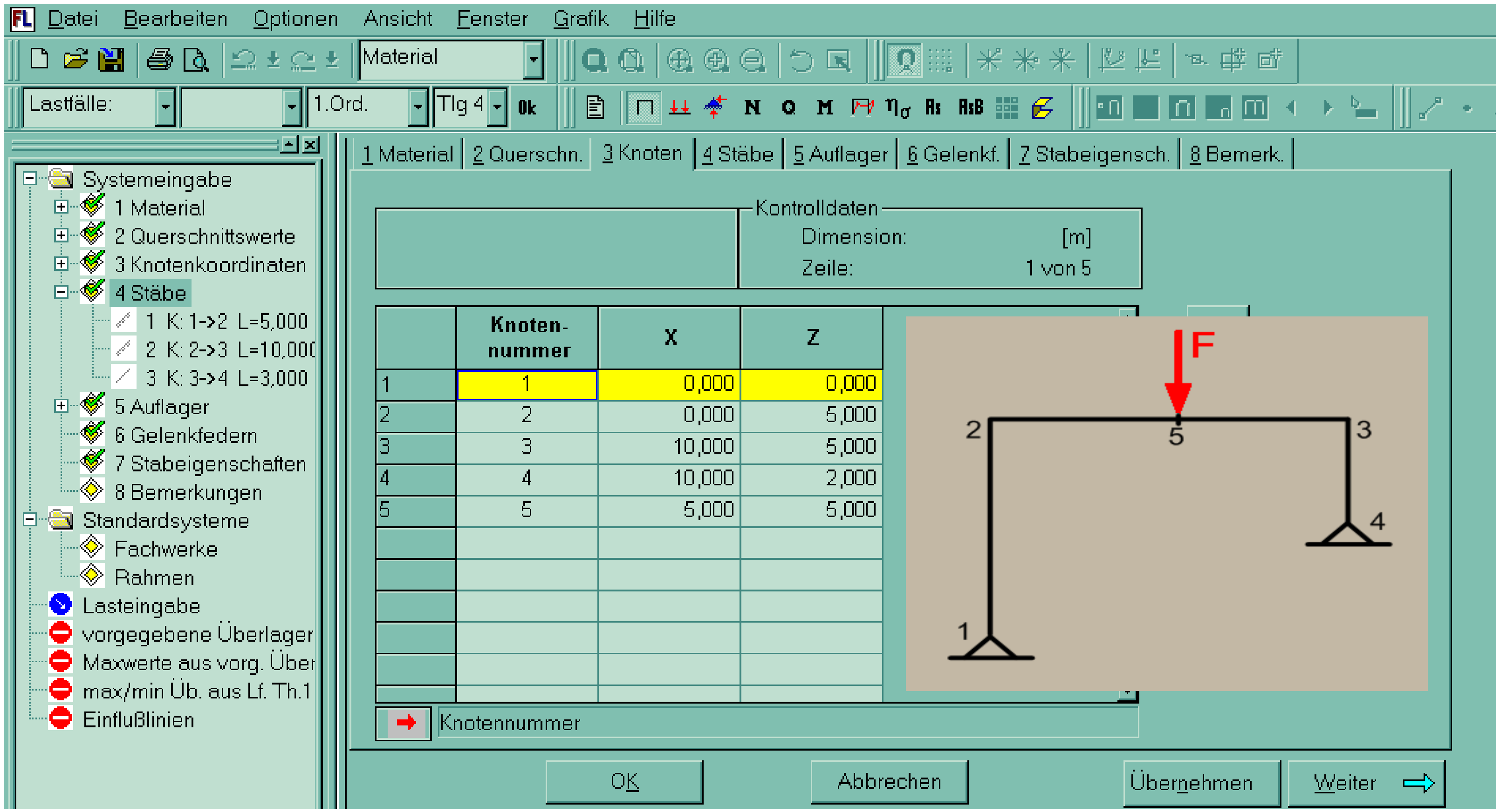



### Problem

Ein FE-Programm ermittelt alle Verschiebungen und Schnittgrößen des dargestellten Systems zu Null., obwohl eine Last von F=10 kN eingegeben wurde.

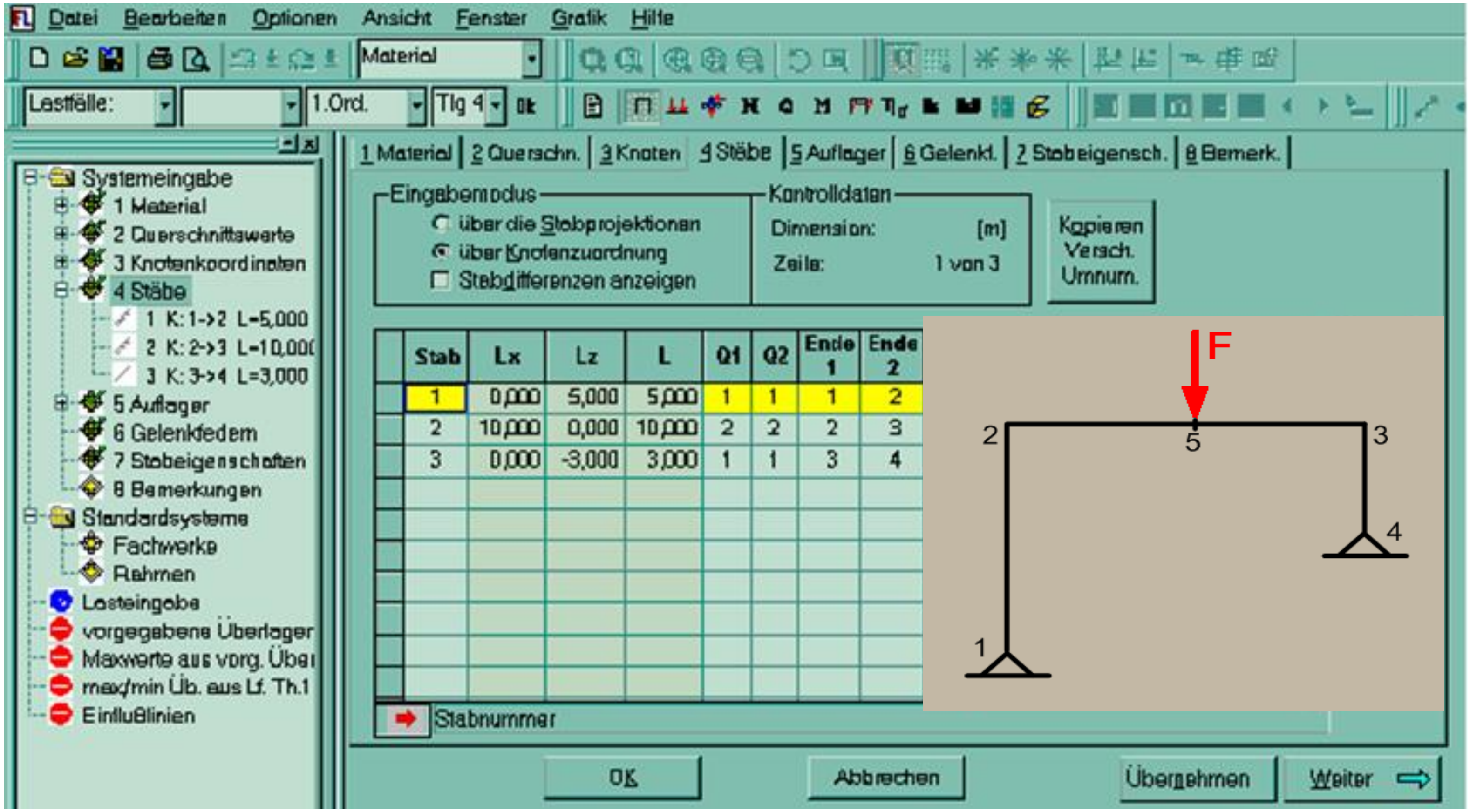
Wie ist das möglich?

## Beispiele für fehlerhafte Systemeingaben – Beispiel 1



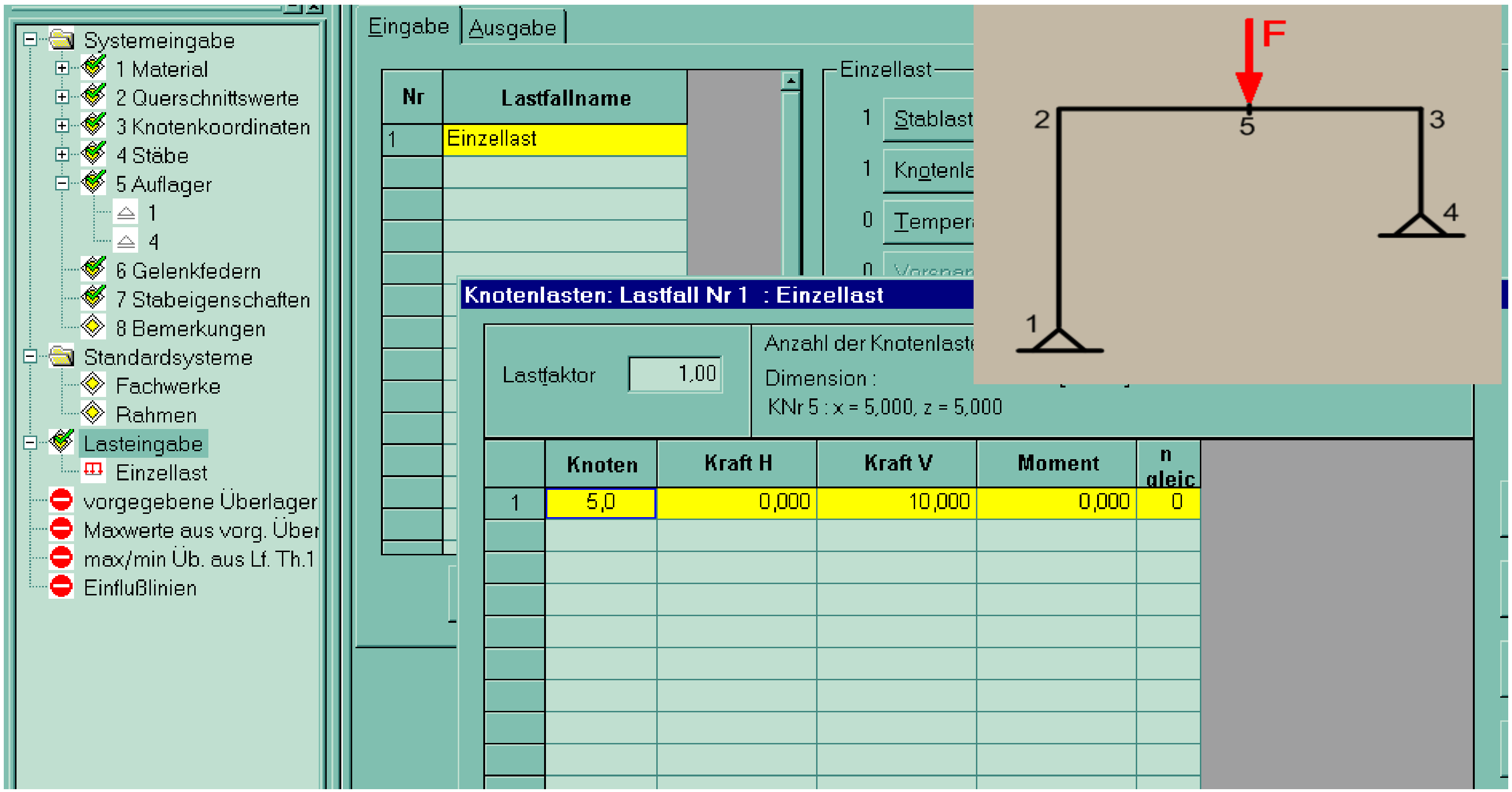
# FEM für Stabtragwerke

## Beispiele für fehlerhafte Systemeingaben – Beispiel 1



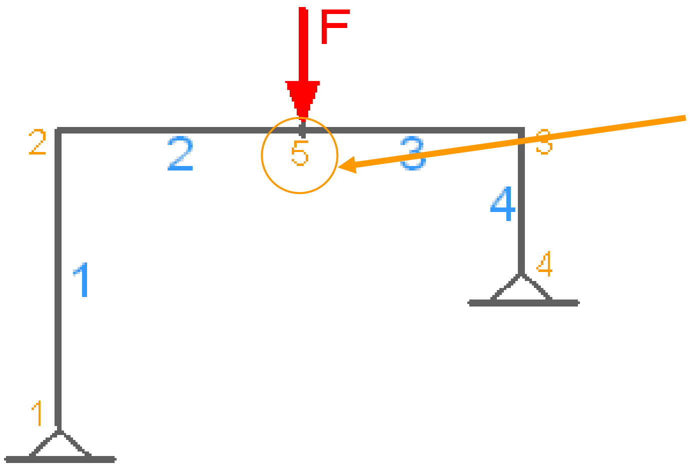
# FEM für Stabtragwerke

## Beispiele für fehlerhafte Systemeingaben – Beispiel 1



# FEM für Stabtragwerke

## Beispiele für fehlerhafte Systemeingaben – Beispiel 1




Hängender Knoten!

### Fehlerdiagnose:

Knotenpunkt 5 wurde im Programm definiert und mit der Kraft F belastet. Jedoch ist der Knoten nicht mit dem FE-System verbunden. Damit wird das System auch nicht mit der Kraft F belastet. Knoten 5 ist ein sogenannter „hängender Knoten“.

Element Definitionen (fehlerhaft):

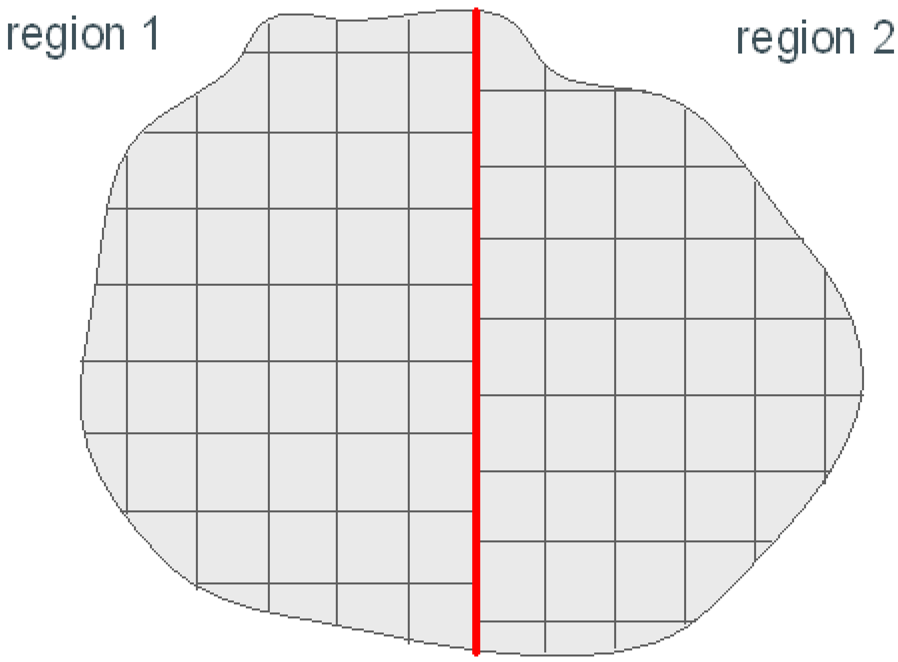
| Elementnummer | Knoten 1 | Knoten 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 4 |

Element Definitionen (korrekt):

| Elementnummer | Knoten 1 | Knoten 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 5 |
| 3 | 5 | 3 |
| 4 | 3 | 4 |

# FEM für Stabtragwerke

## Beispiele für fehlerhafte Systemeingaben – Beispiel 2



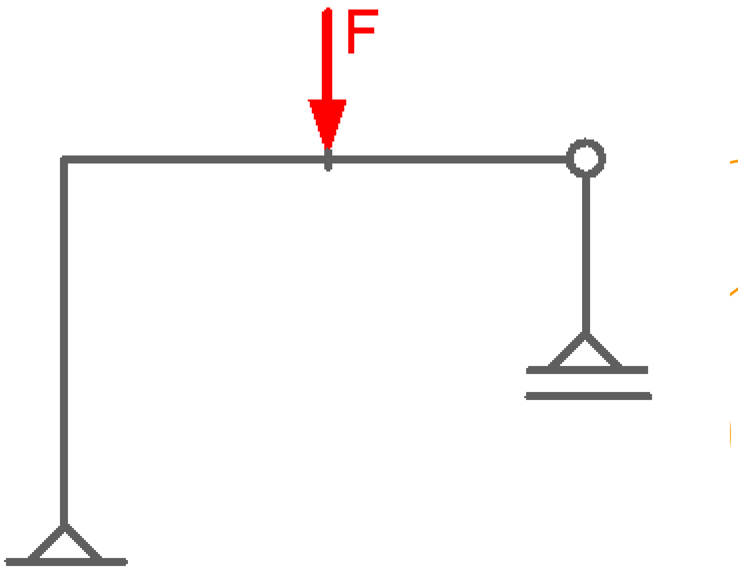

### Problem

Vom einem FE-Programm wurden rechteckige Element in zwei benachbarten Bereichen generiert.

Vorsicht! Die Elemente an der gemeinsamen Berandung sind NICHT miteinander verbunden, sofern nicht spezielle Elemente für diesen Fall verwendet wurden. FE-Netze müssen diesbezüglich sorgfältig überprüft werden!

# FEM für Stabtragwerke

## Beispiele für fehlerhafte Systemeingaben – Beispiel 3



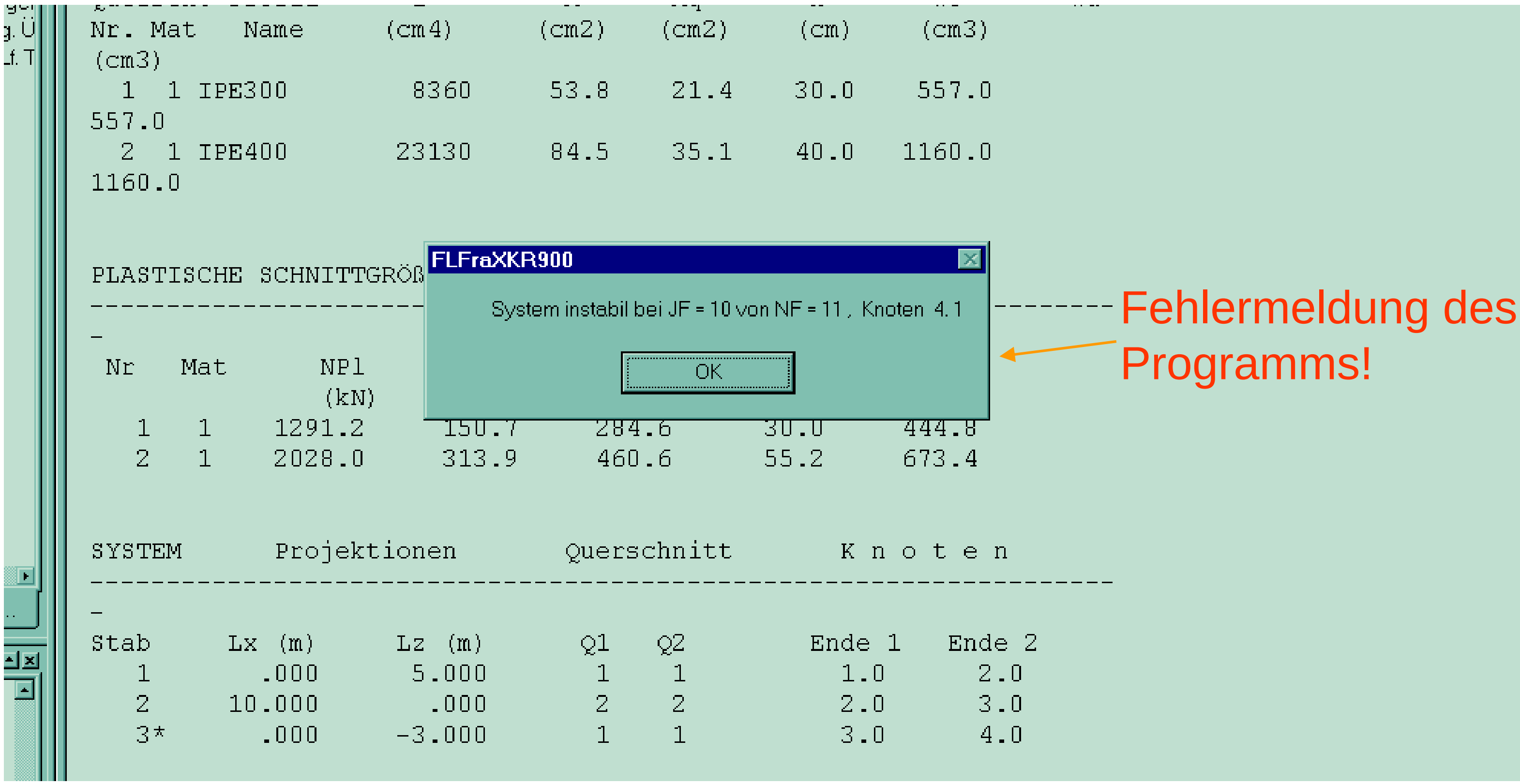

Instabiles System !

**Problem:**

Ein instabiles System wurde in ein FE-Programm eingegeben. Wie reagiert das Programm?

# FEM für Stabtragwerke

## Beispiele für fehlerhafte Systemeingaben – Beispiel 3



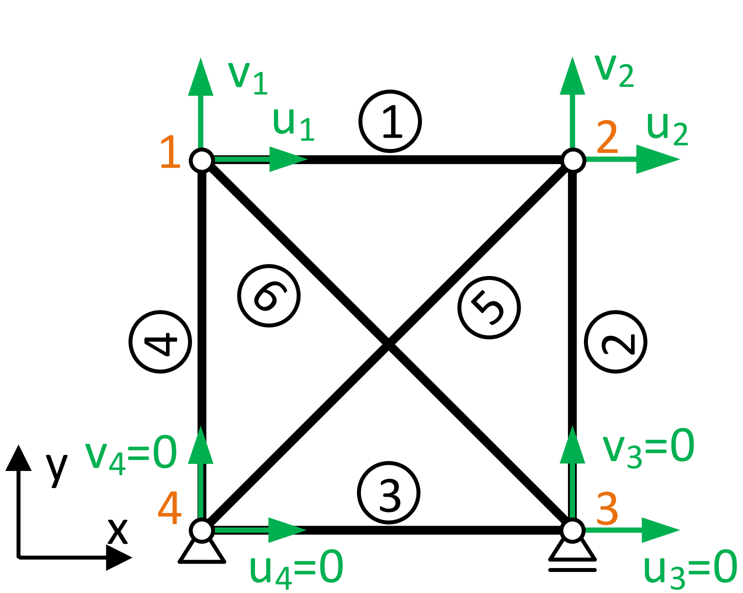
```
Nr. Mat    Name       (cm4)       (cm2)    (cm2)      (cm)      (cm3)
(cm3)
  1   1 IPE300         8360        53.8     21.4      30.0      557.0
557.0
  2   1 IPE400        23130        84.5     35.1      40.0     1160.0
1160.0


PLASTISCHE SCHNITTGRÖß
-----------------------------------------------------------------------
-
 Nr    Mat        NPl
                 (kN)
   1    1       1291.2      150.7      284.6       30.0       444.8
   2    1       2028.0      313.9      460.6       55.2       673.4


SYSTEM       Projektionen        Querschnitt        K n o t e n
-------------------------------------------------------------------
-
Stab       Lx  (m)       Lz  (m)        Q1     Q2         Ende 1    Ende 2
   1         .000        5.000          1      1           1.0       2.0
   2       10.000         .000          2      2           2.0       3.0
   3*        .000       -3.000          1      1           3.0       4.0
```

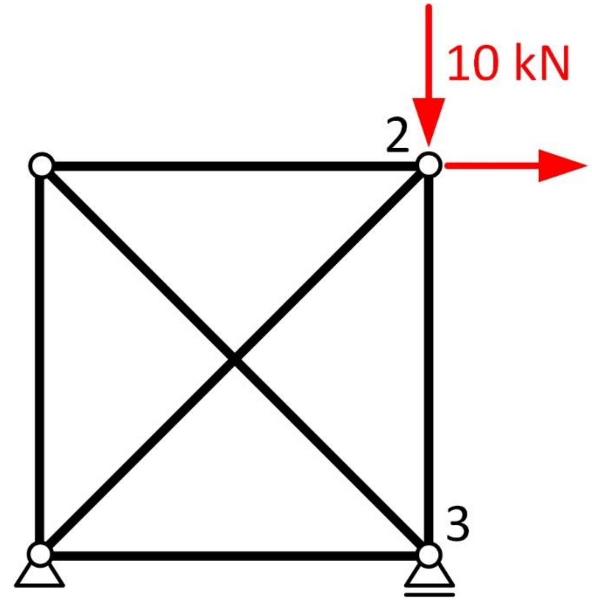


Fehlermeldung des Programms!

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen



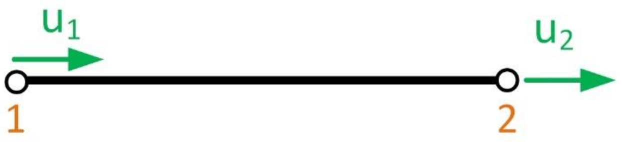




$E = 2.1 \cdot 10^8 \ \mathrm{kN/m^2} \qquad A = 0.004 \ \mathrm{m^2}$

$\ell_1 - \ell_4 = 3.00\,\mathrm{m} \qquad \ell_5 - \ell_6 = 3.00 \cdot \sqrt{2} = 4.24 \ \mathrm{m}$

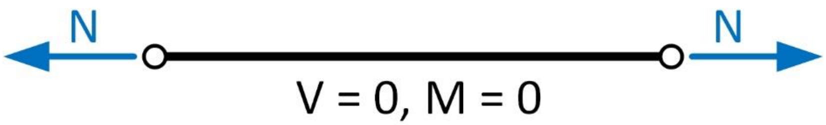
# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Elementsteifigkeitsmatrix




$$\frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

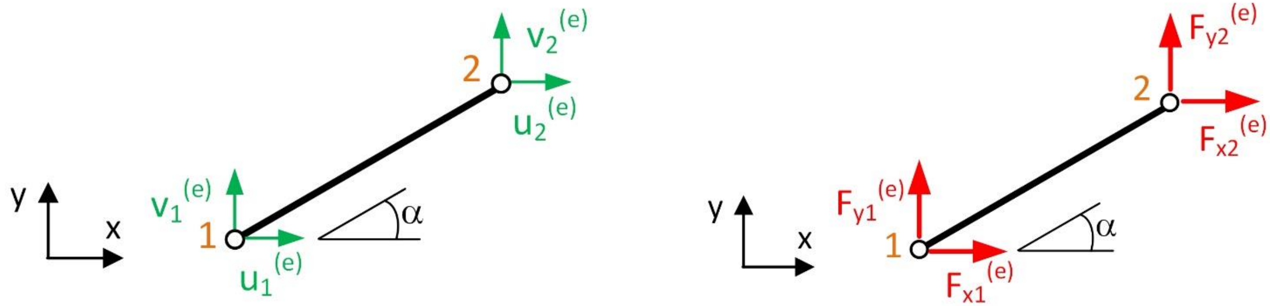

## Elementschnittgrößenmatrix




$$N = \frac{E \cdot A}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

**Freiheitsgrade:**




**Steifigkeitsmatrix:**

$$\frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cdot\cos\alpha & -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha & \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cdot\cos\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cdot\cos\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cdot\cos\alpha & -\sin^2\alpha & \sin\alpha\cdot\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1}^{(e)} \\ F_{y1}^{(e)} \\ F_{x2}^{(e)} \\ F_{y2}^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}^{(e)} = \underline{K}^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)} \quad \textit{with} \quad \underline{K}^{(e)} = \underline{T}^{T} \cdot \underline{K}^{(lok)} \underline{T}$$

**Schnittgrößenmatrix (für Normalkraft):**

$$N = \underline{S}^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)}$$

$$N = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen

**Element 1:** $\alpha = 0°$

$$\frac{E \cdot A}{\ell} = 2.1 \cdot 10^8 \cdot \frac{0.004}{3.00} = 2.8 \cdot 10^5$$


Elementsteifigeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^{(1)} \\ F_{x2}^{(1)} \end{bmatrix} = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$


Elementschnittgrößenmatrix

$$N = \quad 2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen

**Element 2:** $\alpha = 90°$

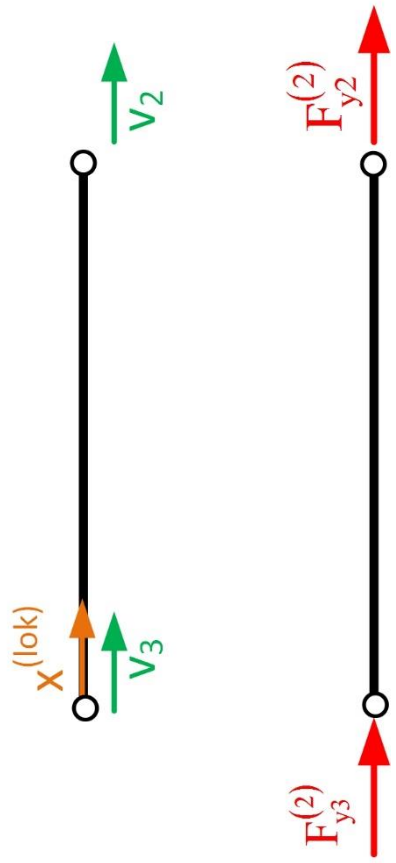
$$\frac{E \cdot A}{\ell} = 2.1 \cdot 10^8 \cdot \frac{0.004}{3.00} = 2.8 \cdot 10^5$$

Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} F_{y3}^{(2)} \\ F_{y2}^{(2)} \end{bmatrix} = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_3 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Elementschnittgrößenmatrix (Normalkraft)

$$N = 2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_3 \\ v_2 \end{bmatrix}$$



# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen

**Element 3:** $\alpha = 0°$

$$\frac{E \cdot A}{\ell} = 2.1 \cdot 10^8 \cdot \frac{0.004}{3.00} = 2.8 \cdot 10^5$$


Elementsteifigkeitsmatrix


$$\begin{bmatrix} F_{x4}^{(3)} \\ F_{x3}^{(3)} \end{bmatrix} = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_4 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Elementschnittgrößenmatrix (Normalkraft)

$$N = 2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_4 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen

**Element 4:** $\alpha = 90°$

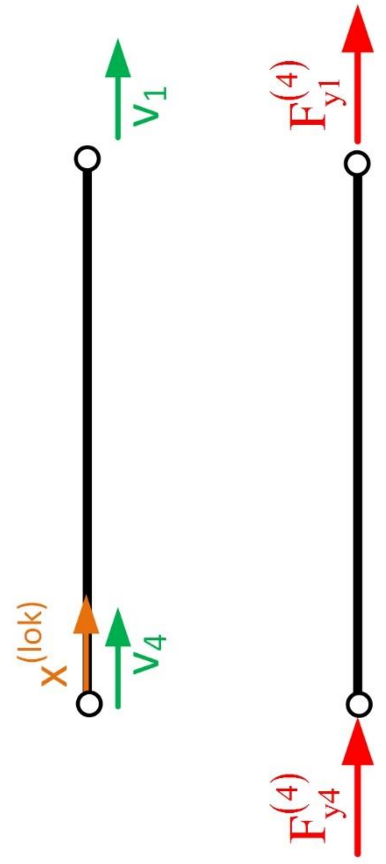
$$\frac{E \cdot A}{\ell} = 2.1 \cdot 10^8 \cdot \frac{0.004}{3.00} = 2.8 \cdot 10^5$$

Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} F_{y4}^{(4)} \\ F_{y1}^{(4)} \end{bmatrix} = 2.80 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_4 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

Elementschnittgrößenmatrix

$$N = 2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_4 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

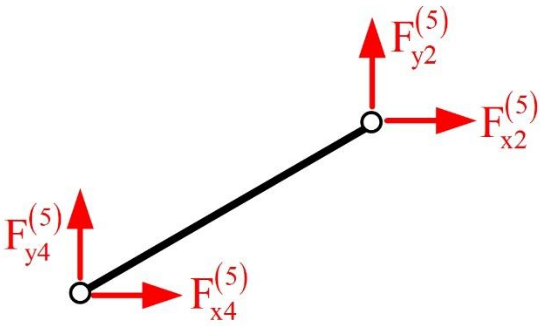


# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen

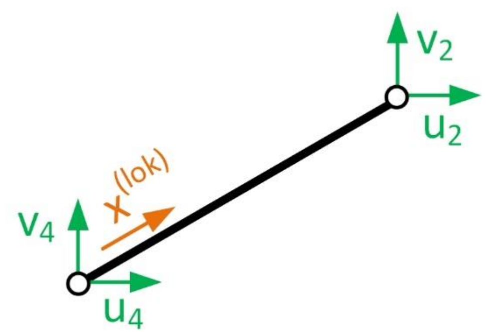
**Element 5:** $\alpha = 45°$

$$\frac{E \cdot A}{\ell} = 2.1 \cdot 10^8 \, \frac{0.004}{4.24} = 1.98 \cdot 10^5$$




Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} F_{x4}^{(5)} \\ F_{y4}^{(5)} \\ F_{x2}^{(5)} \\ F_{y2}^{(5)} \end{bmatrix} = 1.98 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$




Elementschnittgrößenmatrix

$$N = 1.98 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

# Elementsteifigkeitsmatrix eines Fachwerkelements

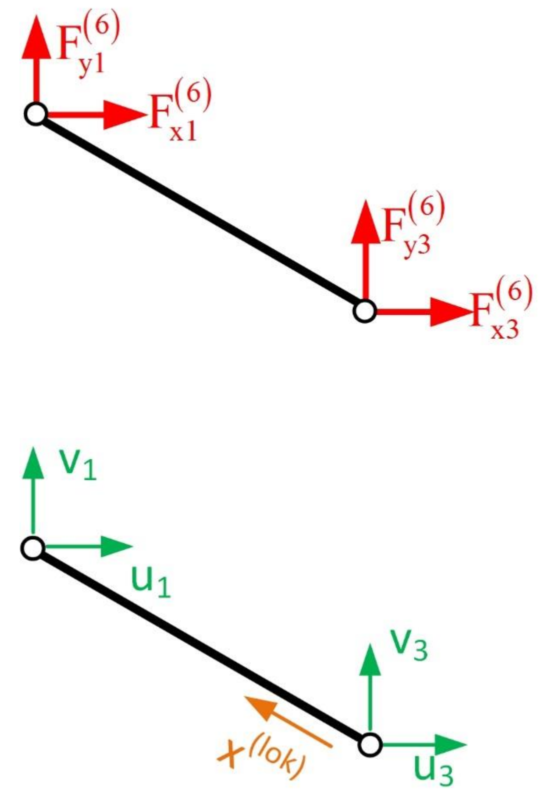
## Beispiel: Elementsteifigkeits- und Elementschnittgrößenmatrizen

**Element 6:** $\alpha = 135°$

$$\frac{E \cdot A}{\ell} = 2.1 \cdot 10^8 \, \frac{0.004}{4.24} = 1.98 \cdot 10^5$$

Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} F_{x3}^{(6)} \\ F_{y3}^{(6)} \\ F_{x1}^{(6)} \\ F_{y1}^{(6)} \end{bmatrix} = 1.98 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$




Elementschnittgrößenmatrix

$$N = 1.98 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & -0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$