Finite Elemente in der Baustatik

Einführung

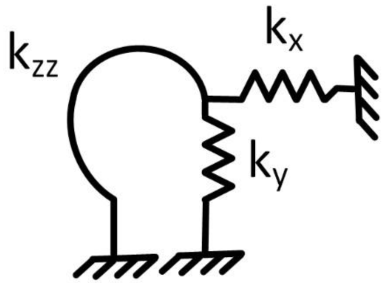
2 Stabtragwerke

Flächentragwerke

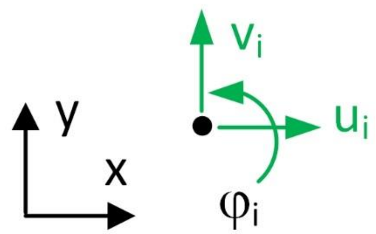
Modellbildung

Steifigkeitsmatrix

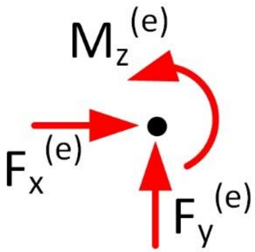
Federelemente



Federn



Verschiebungen



äußere Kräfte

$k_x \;\; [kN/m]$

$k_y \;\; [kN/m]$

$k_{zz} \;\; [kN \cdot m]$

Federkonstanten

Federgleichungen

$$F_x^{(e)} = k_x \cdot u_i$$

$$F_y^{(e)} = k_y \cdot v_i$$

$$M_z^{(e)} = k_{zz} \cdot \varphi_i$$

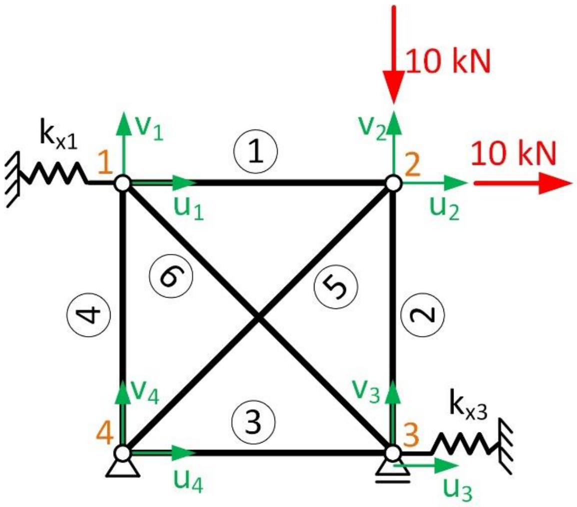
$\rightarrow$

Steifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x^{(e)} \\ F_y^{(e)} \\ M_z^{(e)} \end{bmatrix}$$

Beispiel 1

Modifikation der Steifigkeitsmatrix durch die Federn k_x an den Knotenpunkten 1 und 3



Feder k_x am Knotenpunkt 1 $\quad \bar{k}_{x1} = k_{x1} / 2.8 \cdot 10^5$

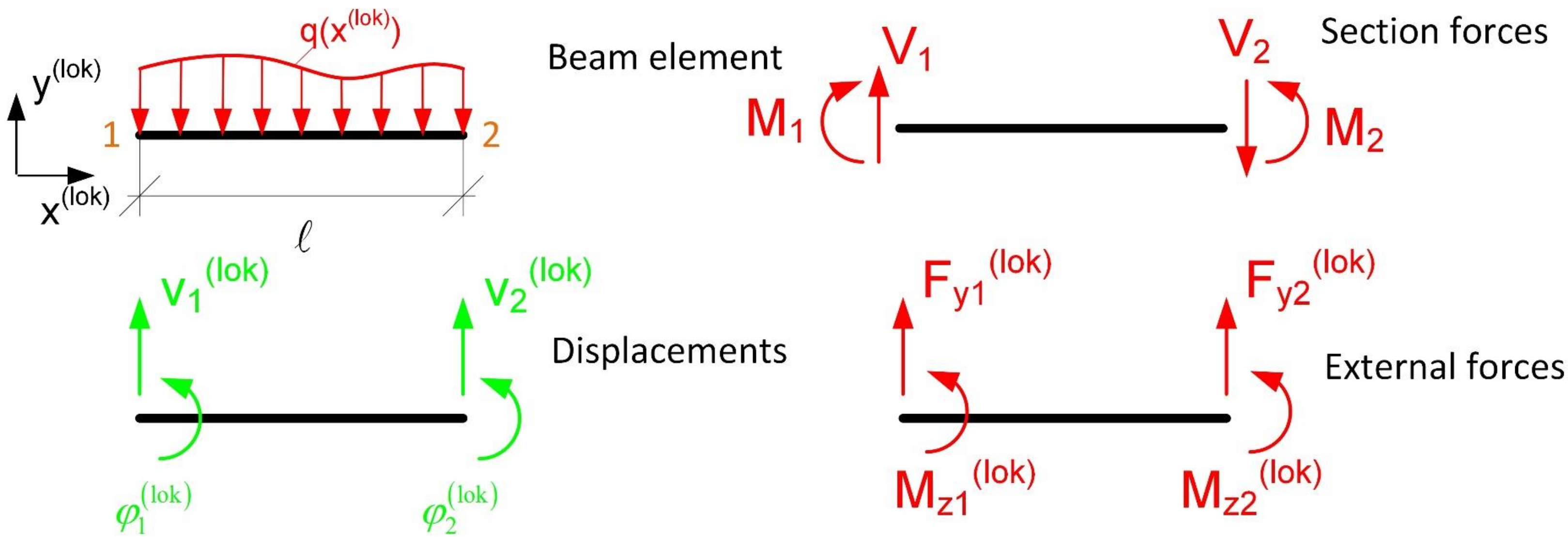
Feder k_x am Knotenpunkt 3 $\quad \bar{k}_{x3} = k_{x3} / 2.8 \cdot 10^5$

$$
\begin{array}{ccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 \end{array}
$$

$$
2.8 \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1.35 + \bar{k}_{x1} & -0.35 & -1.0 & 0 & -0.35 \\ -0.35 & 1.35 & 0 & 0 & 0.35 \\ -1.0 & 0 & 1.35 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 & 1.35 & 0 \\ -0.35 & 0.35 & 0 & 0 & 1.35 + \bar{k}_{x3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Steifigkeitsmatrix und Schnittgrößenmatrix eines Balkens

Balkenelement mit Elementlasten



Vorzeichen: positiv in Richtung der positiven lokalen Koordinaten

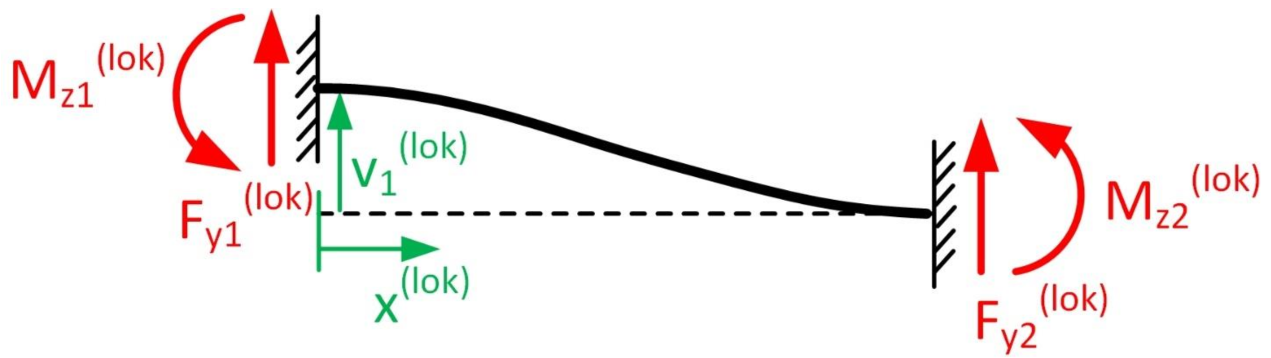
Herleitung der Steifigkeitsmatrix

$F_{y1}^{(lok)}, F_{y2}^{(lok)}, M_1^{(lok)}, M_2^{(lok)}$ sind die Festhaltekräfte und - momente, die sich ergeben aus den Verschiebungen und Verdrehungen $V_1^{(lok)}, \varphi_1^{(lok)}, V_2^{(lok)}, \varphi_2^{(lok)}$ sowie aus der Elementlast $q(x^{(lok)})$.

Steifigkeitsmatrix und Schnittgrößenmatrix eines Balkens

Herleitung der Steifigkeitsmatrix

Elementkräfte und –momente aufgrund der Verschiebung des Knotenpunkts 1



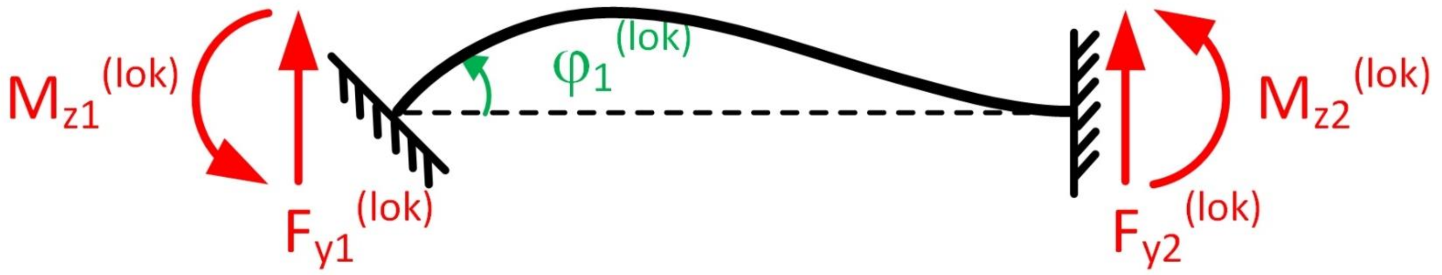
$$F_{y1}^{(lok)} = 12 \cdot EI / \ell^3 \cdot v_1^{(lok)} \qquad F_{y2}^{(lok)} = -12 \cdot EI / \ell^3 \cdot v_1^{(lok)}$$

$$M_{z1}^{(lok)} = 6 \cdot EI / \ell^2 \cdot v_1^{(lok)} \qquad M_{z2}^{(lok)} = 6 \cdot EI / \ell^2 \cdot v_1^{(lok)}$$

Steifigkeitsmatrix und Schnittgrößenmatrix eines Balkens

Herleitung der Steifigkeitsmatrix

Elementkräfte und –momente aufgrund der Verdrehung des Knotenpunkts 1



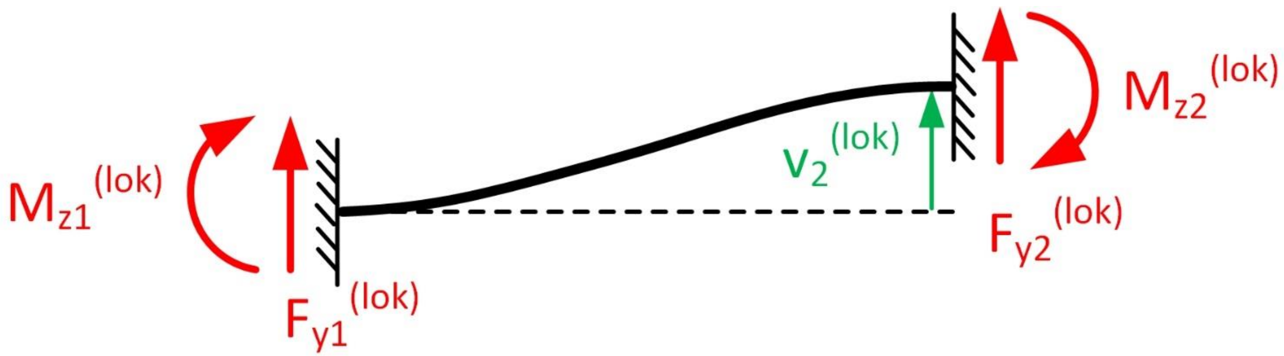
$$F_{y1}^{(lok)} = 6 \cdot EI / \ell^2 \cdot \varphi_1^{(lok)} \qquad F_{y2}^{(lok)} = -6 \cdot EI / \ell^2 \cdot \varphi_1^{(lok)}$$

$$M_{z1}^{(lok)} = 4 \cdot EI / \ell \cdot \varphi_1^{(lok)} \qquad M_{z2}^{(lok)} = 2 \cdot EI / \ell \cdot \varphi_1^{(lok)}$$

Steifigkeitsmatrix und Schnittgrößenmatrix eines Balkens

Herleitung der Steifigkeitsmatrix

Elementkräfte und –momente aufgrund der Verschiebung des Knotenpunkts 2



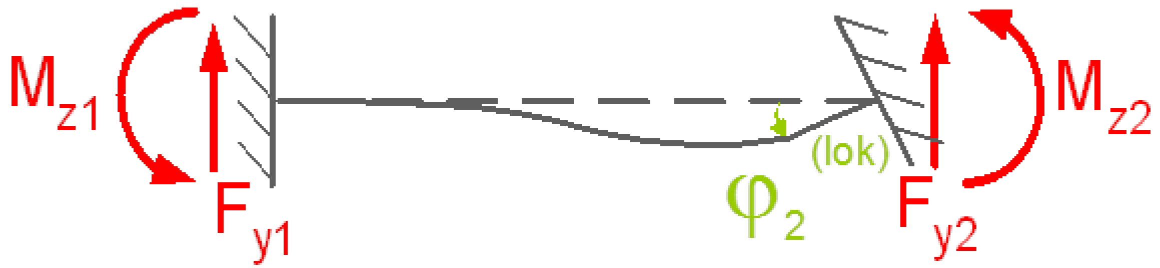
$$F_{y1}^{(lok)} = -12 \cdot EI / \ell^3 \cdot v_2^{(lok)} \qquad F_{y2}^{(lok)} = 12 \cdot EI / \ell^3 \cdot v_2^{(lok)}$$

$$M_{z1}^{(lok)} = -6 \cdot EI / \ell^2 \cdot v_2^{(lok)} \qquad M_{z2}^{(lok)} = -6 \cdot EI / \ell^2 \cdot v_2^{(lok)}$$

Steifigkeitsmatrix und Schnittgrößenmatrix eines Balkens

Herleitung der Steifigkeitsmatrix

Elementkräfte und –momente aufgrund der Verdrehung des Knotenpunkts 2



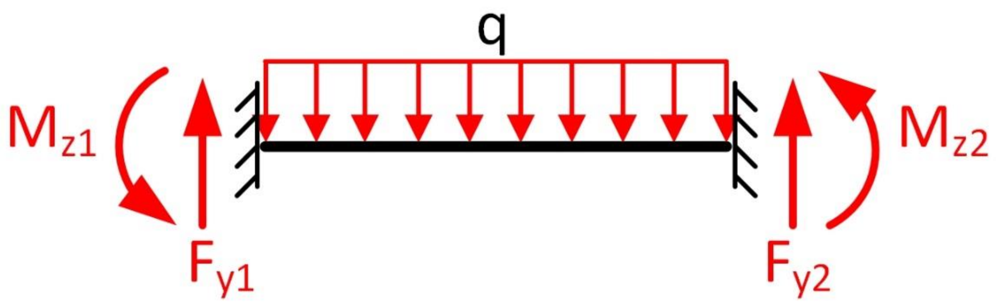
$$F_{y1}^{(lok)} = 6 \cdot EI/\ell^2 \cdot \varphi_2^{(lok)} \qquad F_{y2}^{(lok)} = -6 \cdot EI/\ell^2 \cdot \varphi_2^{(lok)}$$

$$M_{z1}^{(lok)} = 2 \cdot EI/\ell \cdot \varphi_2^{(lok)} \qquad M_{z2}^{(lok)} = 4 \cdot EI/\ell \cdot \varphi_2^{(lok)}$$

Steifigkeitsmatrix und Schnittgrößenmatrix eines Balkens

Herleitung der Steifigkeitsmatrix

Elementkräfte und –momente aufgrund der Elementlasten



$$F_{y1}^{(lok)} = q \cdot \ell / 2 \qquad F_{y2}^{(lok)} = q \cdot \ell / 2$$

$$M_{z1}^{(lok)} = q \cdot \ell^2 / 12 \qquad M_{z2}^{(lok)} = -q \cdot \ell^2 / 12$$

Steifigkeitsmatrix und Schnittgrößenmatrix eines Balkens

$$e.g. \quad F_{y1}^{(lok)} = \frac{12 \quad E \cdot I}{\ell^3} \cdot v_1^{(lok)} + \frac{6 \quad E \cdot I}{\ell^2} \cdot \varphi_1^{(lok)} - \frac{12 \quad E \cdot I}{\ell^3} \cdot v_2^{(lok)} + \frac{6 \quad E \cdot I}{\ell^2} \cdot \varphi_2^{(lok)} + \quad F_L^{1}$$

Die Ausdrücke für die Knotenpunktverschiebungen und –verdrehungen führen zur *Steifigeitsmatrix*.

Die Festhaltekräfte und –momente infolge **q** *führen zum Elementlastvektor*

$$\frac{E \cdot I}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 12/\ell^2 & 6/\ell & -12/\ell^2 & 6/\ell \\ 6/\ell & 4 & -6/\ell & 2 \\ -12/\ell^2 & -6/\ell & 12/\ell^2 & -6/\ell \\ 6/\ell & 2 & -6/\ell & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^{(lok)} \\ \varphi_1^{(lok)} \\ v_2^{(lok)} \\ \varphi_2^{(lok)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{y1}^{(lok)} \\ M_{z1}^{(lok)} \\ F_{y2}^{(lok)} \\ M_{z2}^{(lok)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{L1} \\ M_{L1} \\ F_{L2} \\ M_{L2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{be}^{(lok)} \cdot \underline{u}_{be}^{(lok)} = \underline{F}_{be}^{(lok)} - \underline{F}_{bL}^{(lok)}$$

Steifigkeitsmatrix und Schnittgrößenmatrix eines Balkens

Schnittgrößenmatrix

The section forces matrix is obtained from t:he stiffness matrix with:

$$V_1 = F_{y1}^{(lok)}$$

$$M_1 = -M_{z1}^{(lok)}$$

$$V_2 = -F_{y2}^{(lok)}$$

$$M_2 = M_{z2}^{(lok)}$$

Steifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} F_{y1}^{(lok)} \\ M_{z1}^{(lok)} \\ F_{y2}^{(lok)} \\ M_{z2}^{(lok)} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot I}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 12/\ell^2 & 6/\ell & -12/\ell^2 & 6/\ell \\ 6/\ell & 4 & -6/\ell & 2 \\ -12/\ell^2 & -6/\ell & 12/\ell^2 & -6/\ell \\ 6/\ell & 2 & -6/\ell & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^{(lok)} \\ \varphi_1^{(lok)} \\ v_2^{(lok)} \\ \varphi_2^{(lok)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{L1} \\ M_{L1} \\ F_{L2} \\ M_{L2} \end{bmatrix}$$

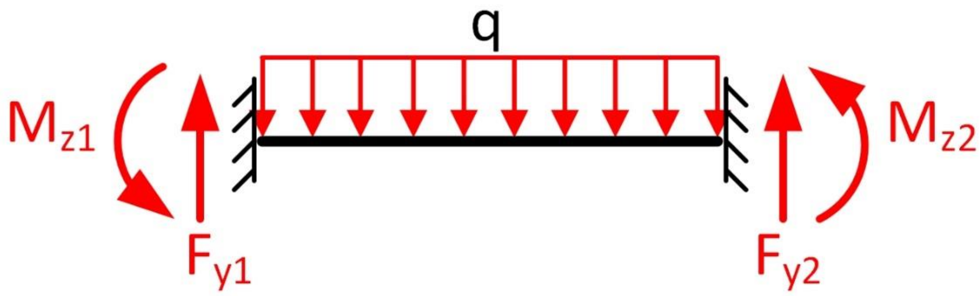
Schnittgrößenmatrix

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot I}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 12/\ell^2 & 6/\ell & -12/\ell^2 & 6/\ell \\ -6/\ell & -4 & 6/\ell & -2 \\ 12/\ell^2 & 6/\ell & -12/\ell^2 & 6/\ell \\ 6/\ell & 2 & -6/\ell & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^{(lok)} \\ \varphi_1^{(lok)} \\ v_2^{(lok)} \\ \varphi_2^{(lok)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{L1} \\ -M_{L1} \\ -F_{L2} \\ M_{L2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{S} = \underline{S}_{be}^{(lok)} \cdot \underline{u}_{be}^{(lok)} + \underline{F}_{LS}^{(lok)}$$

Steifigkeitsmatrix und Schnittgrößenmatrix eines Balkens

Elementlastvektor für eine Gleichlast



$$F_{y1}^{(lok)} = q \cdot \ell / 2$$

$$M_{z1}^{(lok)} = q \cdot \ell^2 / 12$$

$$F_{y2}^{(lok)} = q \cdot \ell / 2$$

$$M_{z2}^{(lok)} = -q \cdot \ell^2 / 12$$

$$\begin{bmatrix} F_{L1} \\ M_{L1} \\ F_{L2} \\ M_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \cdot \ell / 2 \\ q \cdot \ell^2 / 12 \\ q \cdot \ell / 2 \\ -q \cdot \ell^2 / 12 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix und Schnittgrößenmatrix eines Balkens

Steifigkeits-matrix

$$\frac{E \cdot I}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 12/\ell^2 & 6/\ell & -12/\ell^2 & 6/\ell \\ 6/\ell & 4 & -6/\ell & 2 \\ -12/\ell^2 & -6/\ell & 12/\ell^2 & -6/\ell \\ 6/\ell & 2 & -6/\ell & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^{(lok)} \\ \varphi_1^{(lok)} \\ v_2^{(lok)} \\ \varphi_2^{(lok)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{y1}^{(lok)} \\ M_{z1}^{(lok)} \\ F_{y2}^{(lok)} \\ M_{z2}^{(lok)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{be}^{(lok)} \cdot \underline{u}_{be}^{(lok)} = \underline{F}_{be}^{(lok)}$$

Schnittgrößen-matrix

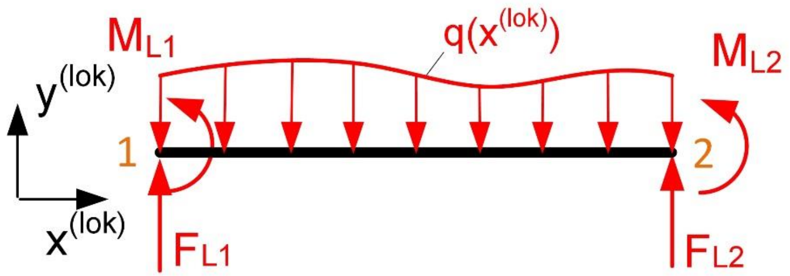
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot I}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 12/\ell^2 & 6/\ell & -12/\ell^2 & 6/\ell \\ -6/\ell & -4 & 6/\ell & -2 \\ 12/\ell^2 & 6/\ell & -12/\ell^2 & 6/\ell \\ 6/\ell & 2 & -6/\ell & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^{(lok)} \\ \varphi_1^{(lok)} \\ v_2^{(lok)} \\ \varphi_2^{(lok)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{S} = \underline{S}_{be}^{(lok)} \cdot \underline{u}_{be}^{(lok)}$$

Elementlasten eines Biegebalkens

Berücksichtigung von Elementlasten:

- Bei der Berechnung des Gesamtsystems werden Elementlasten durch die Knotenkräfte und –momente $F_{L1}, M_{L1}, F_{L2}, M_{L2}$ ersetzt (äquivalente Knotenlasten).
- Die Äquivalenten Knotenlasten sind die Auflagerreaktionen des eingespannten Balkens, die mit umgekehrtem Vorzeichen auf das Gesamtsystem aufgebracht werden.



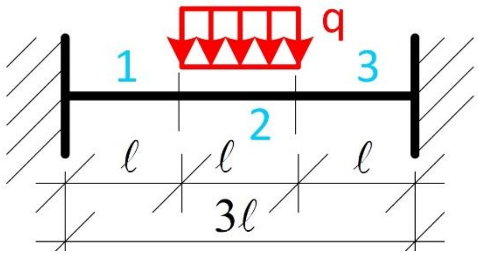
Positive Richtung der Auflagerreaktionen

Element

Elementlasten eines Biegebalkens

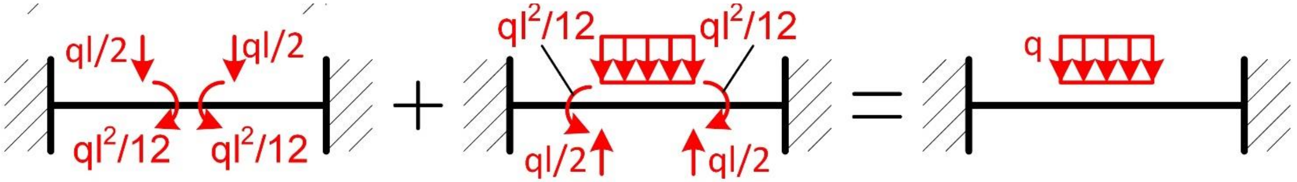
Beispiel 2: Elementlast auf ein Balkenelement

System:



Bei einem System, das aus 3 Balkenelementen besteht, ist ein Balkenelement mit einer Gleichlast belastet. Es sind die zugehörigen äquivalenten Knotenkräfte zu bestimmen.

Äquivalente Knotenkräfte:



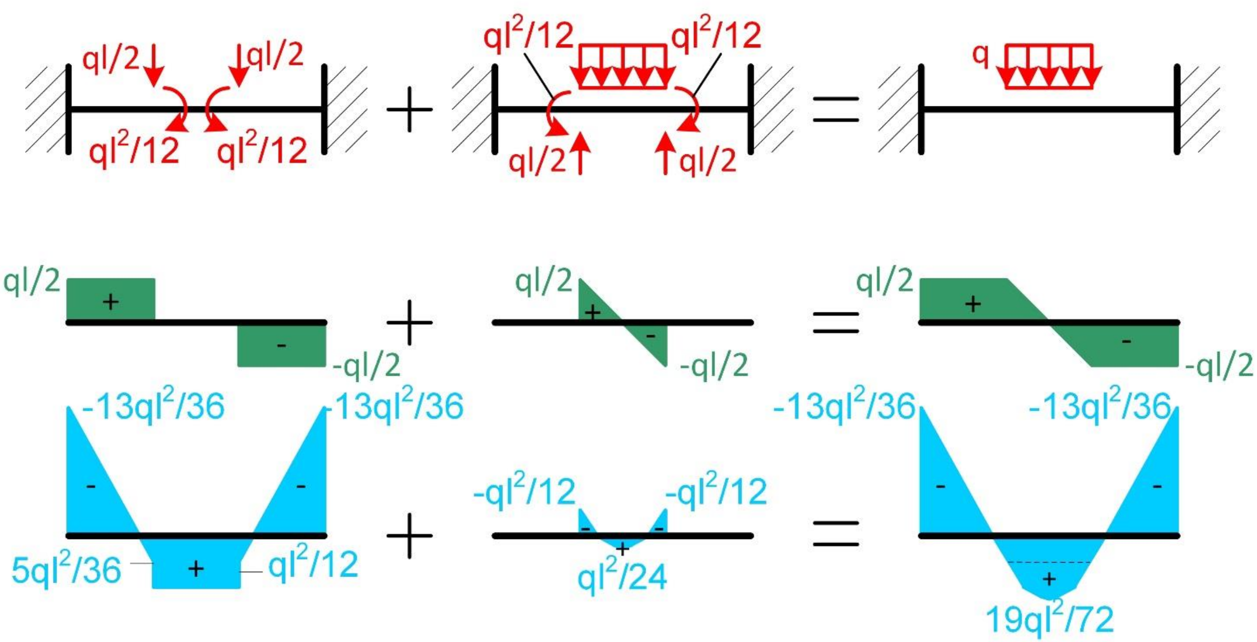
Elementlasten eines Biegebalkens

Beispiel 2: Elementlast auf ein Balkenelement

Superposition

Querkräfte

Momente



System mit äquivalenten Lasten

Balkenelement mit beidseitiger Einspannung

Superposition der Schnittgrößen

Elementlasten eines Biegebalkens

Berücksichtigung beliebiger Elementlasten als äquivalente Knotenlasten

1. Auflagerkräfte und Starreinspannmomente am beidseitig eingespannten Balkenelement bestimmen.

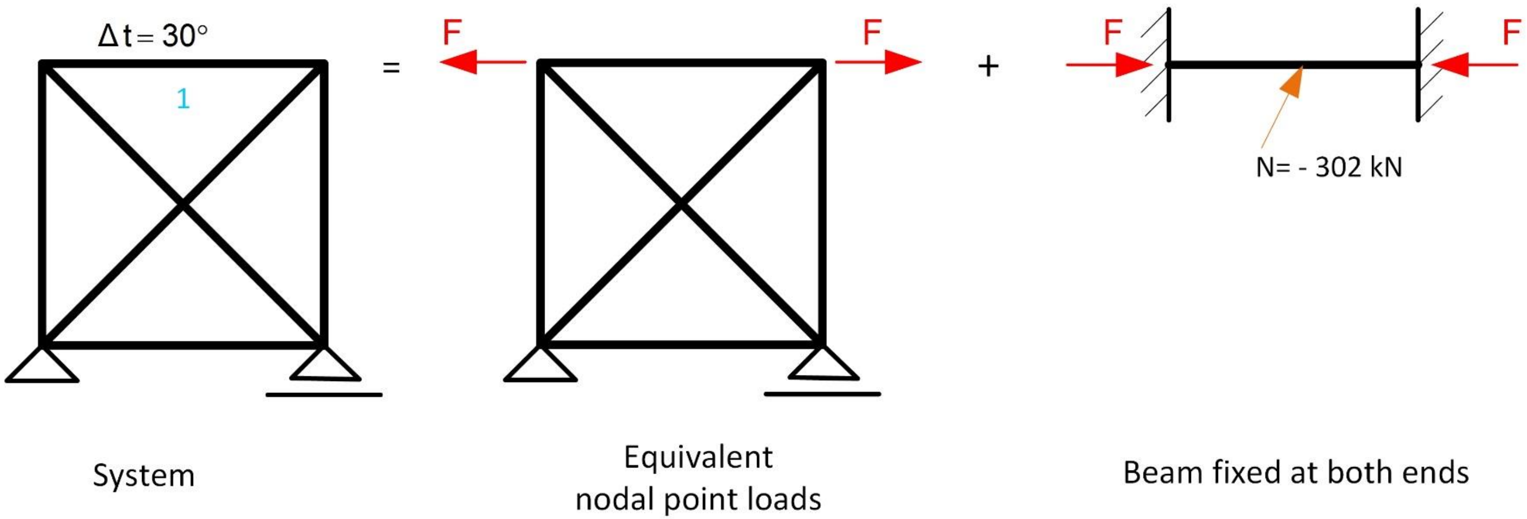
2. Auflagerkräfte und Starreinspannmomente mit umgekehrten Vorzeichen als zusätzliche Knotenlasten (äquivalente Lasten) am Gesamtsystem aufbringen und Gesamtsystem mit Stabtragwerksprogramm berechnen.

3. Schnittgrößen der Berechnung des Gesamtsystems mit den äquivalenten Lasten mit den Schnittgrößen des beidseitig eingespannten Einfeldträgers überlagern

Elementlasten eines Biegebalkens

Beispiel 3: Temperaturbeanspruchung

Element 1 wird auf 30°C erwärmt. Die Normalkräfte in den Elementen sind zu bestimmen.



Äquivalente Knotenkräfte

$$F = E \cdot A \cdot \alpha_T \cdot \Delta_t \qquad F = 2.1 \cdot 10^8 \cdot 0.004 \cdot 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot 30 = 302 \text{ kN} \qquad N = -302 \text{ kN}$$

Elementlasten eines Biegebalkens

Beispiel 3: Temperaturbeanspruchung.

Gleichungssystem:

$$2.80 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 1.35 & -0.35 & -1. & 0 & -0.35 \\ -0.35 & 1.35 & 0 & 0 & 0.35 \\ -1. & 0 & 1.35 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 & 1.35 & 0 \\ -0.35 & 0.35 & 0 & 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -302 \\ 0 \\ 302 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.540 \\ -0.112 \\ 0.428 \\ -0.112 \\ 0.112 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}\ m$$

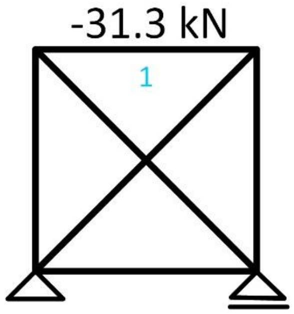
Normalkräfte:

$$N_1 = 271.1\,kN \qquad N_2 = -31.3\,kN \qquad N_3 = -31.3\,kN$$

$$N_4 = 5.0\,kN \qquad N_5 = 44.3\,kN \qquad N_6 = 44.3\,kN$$

Superposition:

$$N_1 = 271.1 - 302.4 = -31.3\,kN$$



Biegebalken mit Längs- und Schubsteifigkeit

Erweiterung für Normalkräfte und für eine Schubsteifigkeit

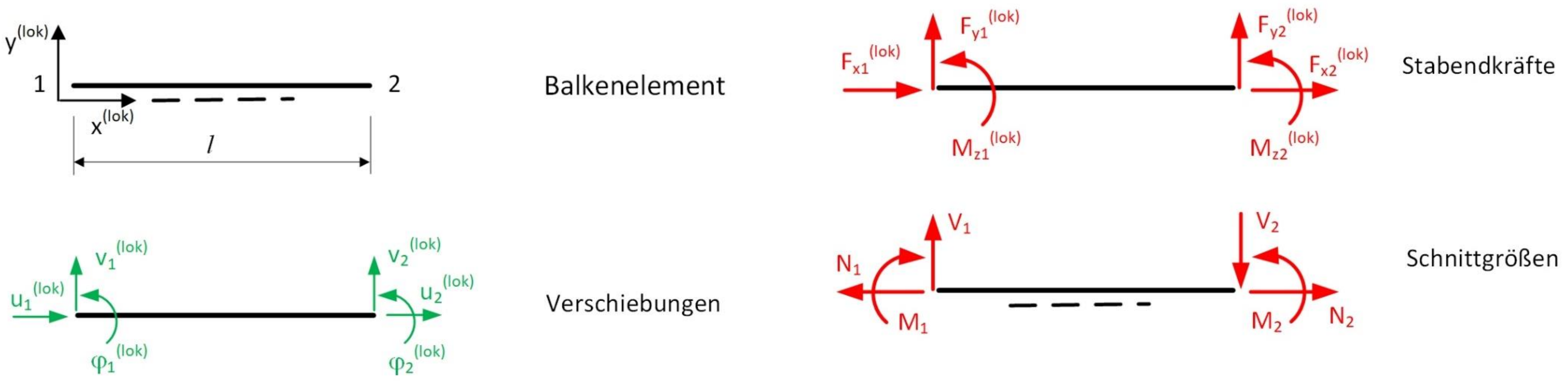
- Die Erweiterung des Biegebalkenelements für eine Längs- und Schubsteifigkeit wird zur Berechnung allgemeiner Stabwerke wie z.B. Rahmen benötigt.
- Die Berücksichtigung der Schubsteifigkeit wird auch benötigt wenn Schubverformungen signifikant sind. Bei kommerzieller FE software sind in der Regel Balkenelemente mit Schubsteifiglkeit implementiert.

Erweiterung der Steifigkeitsmatrix

- *Längssteifigkeit:* Die Steifigkeitsmatrix mit den Ausdrücken zur Beschreibung der Biegung wird erweitert um die Zeilen und Spalten der Steifigkeitsmatrix des Fachwerkelements, die die Normalkraftbeanspruchung ausdrücken.
- *Schubsteifigkeit:* Die Ausdrücke der Steifigkeitsmatrix ergeben sich aus der Lösung der Differentialgleichung des schubweichen Balkens.

Steifigkeitsmatrix und Schnittgrößenmatrix eines Balkens

Balkenelement



Biegebalken mit Längs- und Schubsteifigkeit

Steifigkeitsmatrix

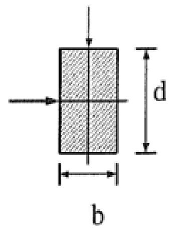
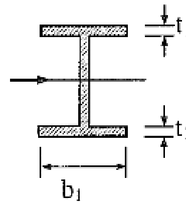
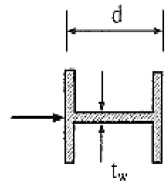
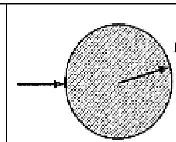
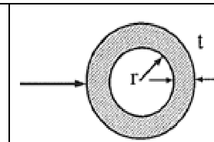
$$
\begin{bmatrix}
a_0 & 0 & 0 & -a_0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12 a_1}{\ell^2} & \frac{6 \cdot a_1}{\ell} & 0 & \frac{-12 a_1}{\ell^2} & \frac{6 \cdot a_1}{\ell} \\
0 & \frac{6 \cdot a_1}{\ell} & 4 a_2 & 0 & \frac{-6 \cdot a_1}{\ell} & 2 a_3 \\
-a_0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{-12 a_1}{\ell^2} & \frac{-6 \cdot a_1}{\ell} & 0 & \frac{12 a_1}{\ell^2} & \frac{-6 \cdot a_1}{\ell} \\
0 & \frac{6 \cdot a_1}{\ell} & 2 a_3 & 0 & \frac{-6 \cdot a_1}{\ell} & 4 a_2
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
u_1^{(lok)} \\ v_1^{(lok)} \\ \varphi_1^{(lok)} \\ u_2^{(lok)} \\ v_2^{(lok)} \\ \varphi_2^{(lok)}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
F_{x1}^{(lok)} \\ F_{y1}^{(lok)} \\ M_{z1}^{(lok)} \\ F_{x2}^{(lok)} \\ F_{y2}^{(lok)} \\ M_{z2}^{(lok)}
\end{bmatrix}
$$

with $a_0 = \frac{E \cdot A}{\ell}$ $\quad a_1 = \frac{E \cdot I}{\ell \cdot (1+m)}$ $\quad a_2 = \frac{E \cdot I \cdot (4+m)}{4 \cdot \ell \cdot (1+m)}$ $\quad a_3 = \frac{E \cdot I \cdot (2-m)}{2 \cdot \ell \cdot (1+m)}$ $\quad m = \frac{12 \cdot E \cdot I}{G \cdot A_s \cdot \ell^2}$

Biegebalken mit Längs- und Schubsteifigkeit

Praktische Hinweise

- Schubflächen für einige Querschnitte:

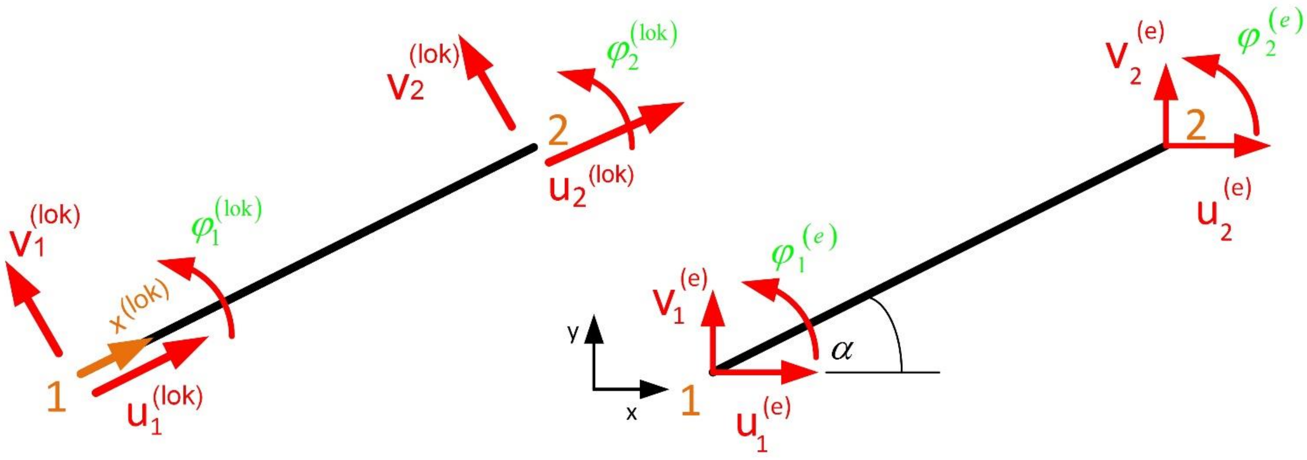
Cross section					
Shear area	$\frac{5}{6}\cdot b\cdot d$	$\frac{5}{3}\cdot t_1\cdot b_1$	$t_W\cdot d$	$0{,}9\cdot\pi\cdot r^2$	$\pi\cdot r\cdot t$

- Schubverformungen können bei der Berechnung unterdrückt werden durch Eingabe einer sehr großen Schubfläche A_s , z.B. $A_s = 1000\cdot A$.

- Wird die Schubfläche zu $A_s = 0$ eingegeben, kann das zu einem kinematischen System führen. Einige Programme schreiben jedoch die Eingabe von $A_s = 0$ vor, wenn Schubverformungen unterdrückt werden sollen. Mechanisch korrekt wäre es in diesem Fall die Schubfläche „unendlich groß“ zu setzen.

Koordinatentransformation

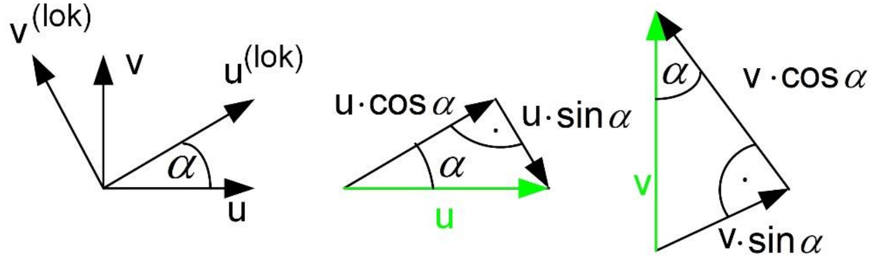
Transformation der Knoten-verschiebungen



Lokale Koordinaten

Globale Koordinaten

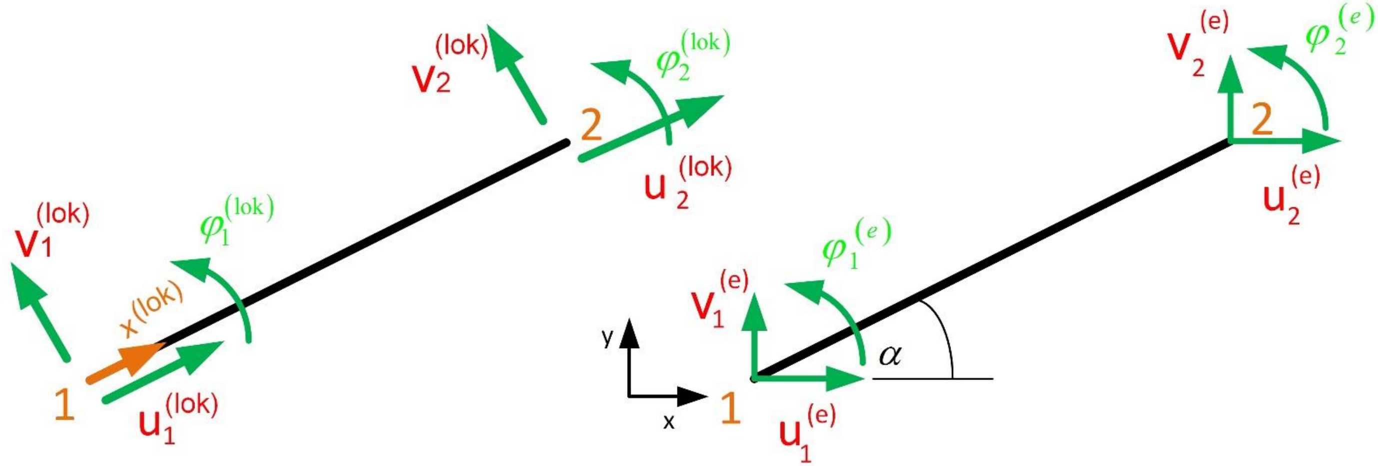
Koordinatentransformation



$$u^{(lok)} = u\cdot\cos\alpha + v\cdot\sin\alpha$$
$$v^{(lok)} = -u\cdot\sin\alpha + v\cdot\cos\alpha$$

Koordinatentransformation

Transformation der Knoten-verschiebungen



Lokale Koordinaten

Globale Koordinaten

Koordinatentransformation für ein Balkenelement

$$u_1^{(lok)} = u_1^{(e)} \cdot \cos\alpha + v_1^{(e)} \cdot \sin\alpha$$

$$v_1^{(lok)} = -u_1^{(e)} \cdot \sin\alpha + v_1^{(e)} \cdot \cos\alpha$$

$$\varphi_1^{(lok)} = \varphi_1^{(e)}$$

$$u_2^{(lok)} = u_2^{(e)} \cdot \cos\alpha + v_2^{(e)} \cdot \sin\alpha$$

$$v_2^{(lok)} = -u_2^{(e)} \cdot \sin\alpha + v_2^{(e)} \cdot \cos\alpha$$

$$\varphi_2^{(lok)} = \varphi_2^{(lok)}$$

Koordinatentransformation

Transformation der Knotenverschiebungen in Matrizenschreibweise

$$u_1^{(lok)} = u_1^{(e)} \cdot \cos\alpha + v_1^{(e)} \cdot \sin\alpha \qquad u_2^{(lok)} = u_2^{(e)} \cdot \cos\alpha + v_2^{(e)} \cdot \sin\alpha$$

$$v_1^{(lok)} = -u_1^{(e)} \cdot \sin\alpha + v_1^{(e)} \cdot \cos\alpha \qquad v_2^{(lok)} = -u_2^{(e)} \cdot \sin\alpha + v_2^{(e)} \cdot \cos\alpha$$

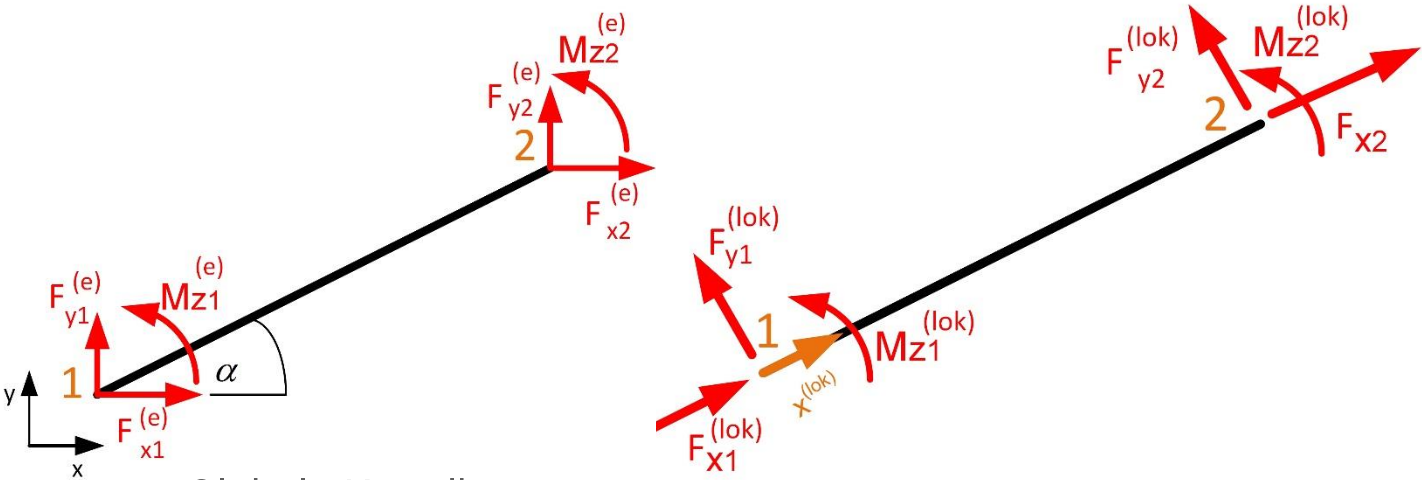
$$\varphi_1^{(lok)} = \varphi_1^{(e)} \qquad \varphi_2^{(lok)} = \varphi_2^{(e)}$$

$$\begin{bmatrix} u_1^{(lok)} \\ v_1^{(lok)} \\ \varphi_1^{(lok)} \\ u_2^{(lok)} \\ v_2^{(lok)} \\ \varphi_2^{(lok)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ \varphi_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ \varphi_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}^{(lok)} = \underline{T} \cdot \underline{u}^{(e)}$$

Koordinatentransformation

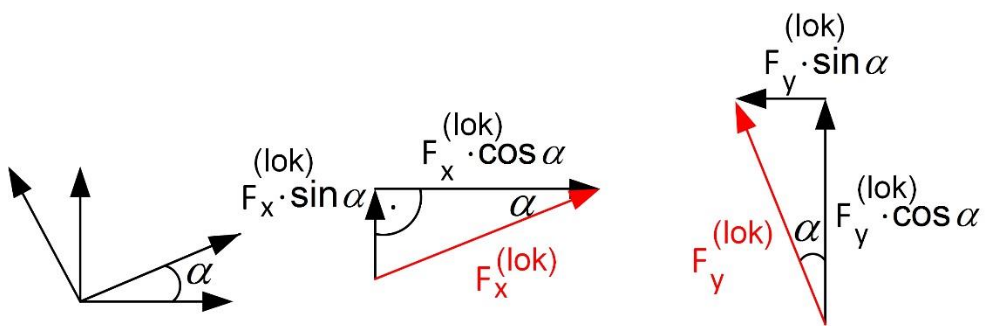
Transformation der Knotenkräfte



Globale Koordinaten

Lokale Koordinaten

Koordinatentransformation

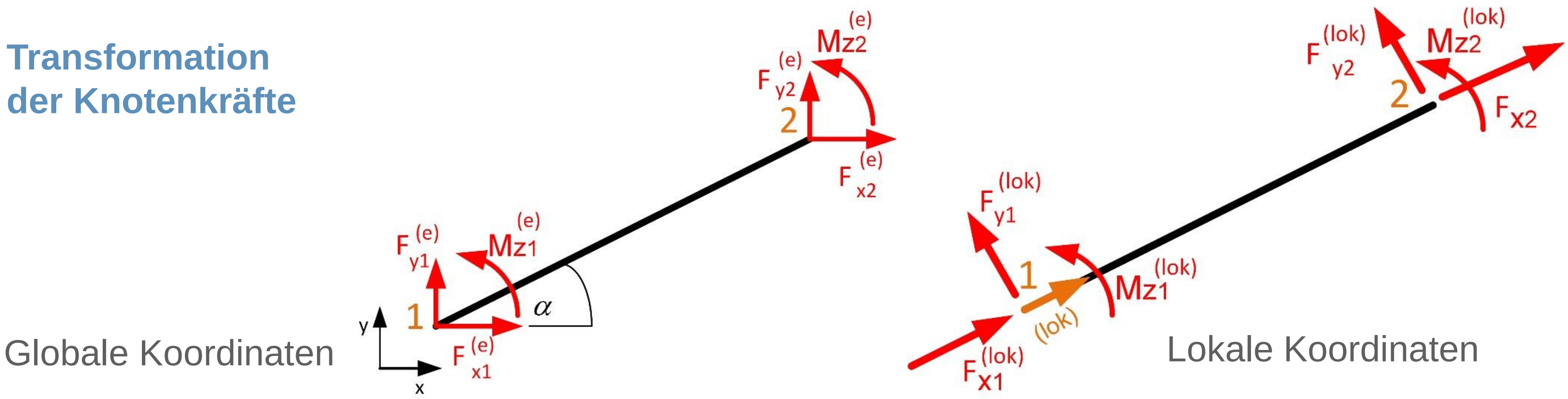


$$F_x = F_x^{(lok)} \cdot \cos\alpha - F_y^{(lok)} \cdot \sin\alpha$$

$$F_y = F_x^{(lok)} \cdot \sin\alpha + F_y^{(lok)} \cdot \cos\alpha$$

Koordinatentransformation

Transformation der Knotenkräfte



Koordinatentransformation beim Balkenelement

$$F_{x1}^{(e)} = \cos\alpha \cdot F_{x1}^{(lok)} - \sin\alpha \cdot F_{y1}^{(lok)} \qquad F_{x2}^{(e)} = \cos\alpha \cdot F_{x2}^{(lok)} - \sin\alpha \cdot F_{y2}^{(lok)}$$

$$F_{y1}^{(e)} = \sin\alpha \cdot F_{x1}^{(lok)} + \cos\alpha \cdot F_{y1}^{(lok)} \qquad F_{y2}^{(e)} = \sin\alpha \cdot F_{y2}^{(lok)} + \cos\alpha \cdot F_{y2}^{(lok)}$$

$$M_{z1}^{(e)} = M_{z1}^{(lok)} \qquad M_{z2}^{(e)} = M_{z2}^{(lok)}$$

Koordinatentransformation

Koordinatentransformation der Knotenkräfte in Matrizenschreibweise

$$F_{x1}^{(e)} = \cos\alpha \cdot F_{x1}^{(lok)} - \sin\alpha \cdot F_{y1}^{(lok)} \qquad F_{x2}^{(e)} = \cos\alpha \cdot F_{x2}^{(lok)} - \sin\alpha \cdot F_{y2}^{(lok)}$$

$$F_{y1}^{(e)} = \sin\alpha \cdot F_{x1}^{(lok)} + \cos\alpha \cdot F_{y1}^{(lok)} \qquad F_{y2}^{(e)} = \sin\alpha \cdot F_{y2}^{(lok)} + \cos\alpha \cdot F_{y2}^{(lok)}$$

$$M_{z1}^{(e)} = M_{z1}^{(lok)} \qquad M_{z2}^{(e)} = M_{z2}^{(lok)}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^{(e)} \\ F_{y1}^{(e)} \\ M_{z1}^{(e)} \\ F_{x2}^{(e)} \\ F_{y2}^{(e)} \\ M_{z2}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{x1}^{(lok)} \\ F_{y1}^{(lok)} \\ M_{z1}^{(lok)} \\ F_{x2}^{(lok)} \\ F_{y2}^{(lok)} \\ M_{z2}^{(lok)} \end{bmatrix}$$

Koordinatentransformation

Verschiebungen: $\underline{u}^{(lok)} = \underline{T} \cdot \underline{u}^{(e)}$

Steifigkeitsmatrix: $\underline{F}^{(lok)} = \underline{K}^{(lok)} \cdot \underline{u}^{(lok)}$

Kräfte: $\underline{F}^{(e)} = \underline{T}^{T} \cdot \underline{F}^{(lok)}$

$$\underline{F}^{(e)} = \underline{T}^{T} \cdot \underline{F}^{(lok)} = \underline{T}^{T} \cdot \underline{K}^{(lok)} \cdot \underline{u}^{(lok)} = \underline{T}^{T} \cdot \underline{K}^{(lok)} \cdot \underline{T} \cdot \underline{u}^{(e)}$$

Elementsteifigkeitsmatrix

$$\underline{F}^{(e)} = \underline{K}^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)} \quad \text{with} \quad \underline{K}^{(e)} = \underline{T}^{T} \cdot \underline{K}^{(lok)} \cdot \underline{T}$$

Elementsteifigkeitsmatrix
in globalen Koordinaten

Elementsteifigkeitsmatrix
in lokalen Koordinaten

Ende

Einführung

2 Stabtragwerke

Flächentragwerke

Modellbildung

Steifigkeitsmatrix und Schnittgrößenmatrix eines Balkens

Balkenelement