Finite Elemente in der Baustatik

Einführung

2 Stabtragwerke

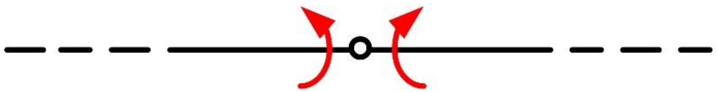
Flächentragwerke

Modellbildung

Gelenke

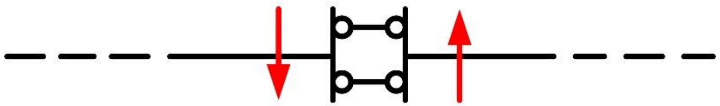
Arten von Gelenken

Biegegelenk



gelöste Bindung: Moment

Querkraftgelenk

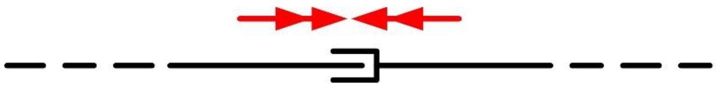


gelöste Bindung : Querkraft

Normalkraftgelenk

gelöste Bindung: Normalkraft

Torsionsgelenk

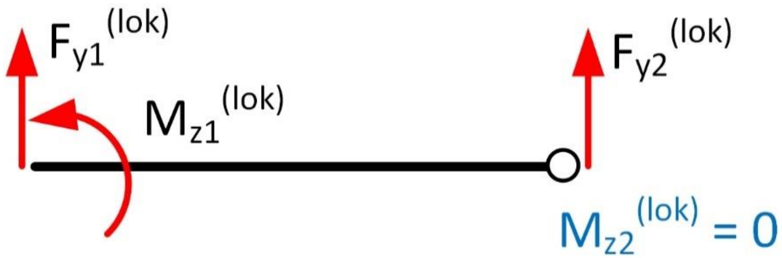


gelöste Bindung: Torsionsmoment

Gelenke

Beispiel: Steifigkeitsmatrix eines Balkens mit einem Biegegelenk

Balkenelement
mit einem Gelenk



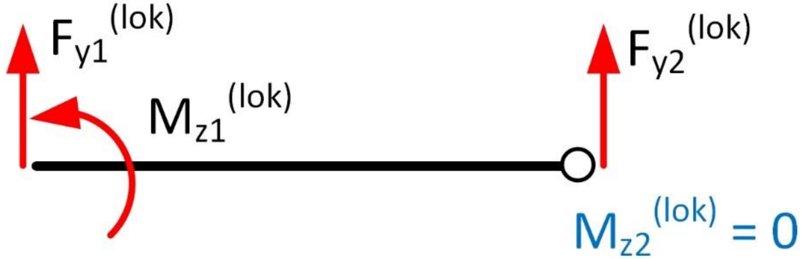
Berücksichtigung des Gelenks in der Steifigkeitsmatrix

- Der Balken besitzt in dem Freiheitsgrad, dessen Bindung gelöst wird, keine Steifigkeit.
- Dies erfordert eine Umformung der Steifigkeitsmatrix.
- In dem gelösten Freiheitsgrad können keine äußeren Kräfte und Momente (Lasten) aufgebracht werden.

Gelenke

Beispiel: Steifigkeitsmatrix eines Balkens mit einem Biegegelenk

Balkenelement
mit einem Gelenk



Steifigkeitsmatrix
ohne Gelenk:

$$\frac{E \cdot I}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 12/\ell^2 & 6/\ell & -12/\ell^2 & 6/\ell \\ 6/\ell & \varphi_2^{(lok)} & -6/\ell & 2 \\ -12/\ell^2 & -6/\ell & 12/\ell^2 & -6/\ell \\ 6/\ell & 2 & -6/\ell & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^{(lok)} \\ \varphi_1^{(lok)} \\ v_2^{(lok)} \\ \varphi_2^{(lok)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{y1}^{(lok)} \\ M_{z1}^{(lok)} \\ F_{y2}^{(lok)} \\ M_{z2}^{(lok)} \end{bmatrix}$$

Reihe 4 für $M_{z2}^{(lok)}$ lautet:

$$E \cdot I/\ell \cdot (6/\ell \cdot v_1^{(lok)} + 2 \cdot \varphi_1^{(lok)} - 6/\ell \cdot v_2^{(lok)} + 4 \cdot \varphi_2^{(lok)}) = M_{z2}^{(lok)} = 0$$

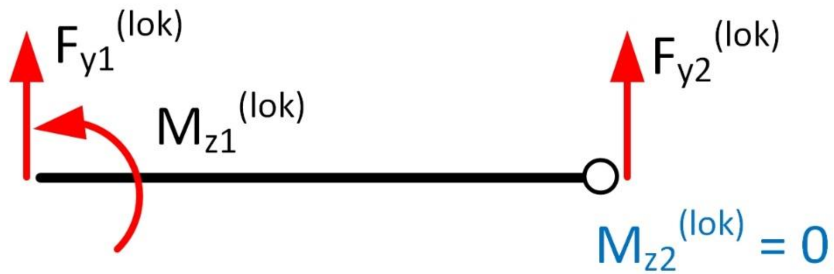
$$\rightarrow \quad \varphi_2^{(lok)} = -3/(2 \cdot \ell) \cdot v_1^{(lok)} - 1/2 \cdot \varphi_1^{(lok)} + 3/(2 \cdot \ell) \cdot v_2^{(lok)}$$

Setzt man $\varphi_2^{(lok)}$ in die Gleichungen der Reihen 1 bis 3 ein, erhält man die Steifigkeitsmatrix des Balkens mit einem Biegegelenk am rechten Rand.

Gelenke

Beispiel: Steifigkeitsmatrix eines Balkens mit einem Biegegelenk

Balkenelement
mit einem Gelenk



Steifigkeitsmatrix eines Balkenelements mit einem Biegegelenk am Knotenpunkt 2:

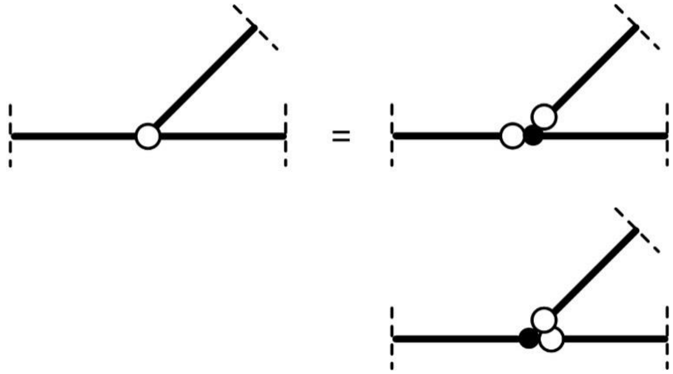
$$\frac{E \cdot I}{\ell} \begin{bmatrix} 3/\ell^2 & 3/\ell & -3/\ell^2 \\ 3/\ell & 3 & -3/\ell \\ -3/\ell^2 & -3/\ell & 3/\ell^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^{(lok)} \\ \varphi_1^{(lok)} \\ v_2^{(lok)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{y1}^{(lok)} \\ M_{z1}^{(lok)} \\ F_{y2}^{(lok)} \end{bmatrix}$$

Gelenke

Hinweise für die Praxis

- Fehlerhafte Gelenkdefinitionen können zu kinematischen Systemen führen.
- An Knoten, an denen mehrere Stäbe zusammentreffen, dass der Drehfreiheits-grad eine Steifigkeit besitzt. Er sollte also mit einem Element, das im betreff-enden Freiheitgrad eine Drehsteifigkeit hat verbunden oder festgehalten sein.
- Wenn in der Berechnung eines Stabtragwerks mit Gelenken, die Fehlermeldung „Kinematisches System“ auftritt, sollten die Gelenkdefinitionen sorgfältig geprüft werden.

Beispiel



2 Balkenelemente mit Gelenk
->1 Balkenelement ohne Gelenk

3 Balkenelemente mit Gelenk
-> Freiheitsgrad ist festgehalten

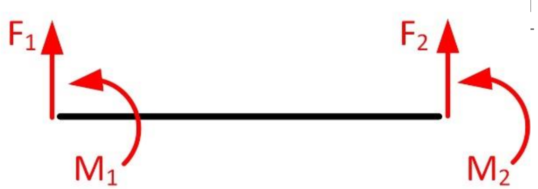
Beispiel: Fehlerhafte Gelenkdefinition am Ende eines Kragarms

Festhaltungen: $v_1 = 0 \quad \varphi_1 = 0$

System

Freiheitsgrade

Äußere Kräfte



Gleichungssystem mit Festhaltungen:

$$\begin{bmatrix} 3/\ell^2 & 3/\ell & -3/\ell^2 & 0 \\ 3/\ell & 3 & 3/\ell & 0 \\ -3/\ell^2 & -3/\ell & 3/\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} v_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \end{matrix}$$

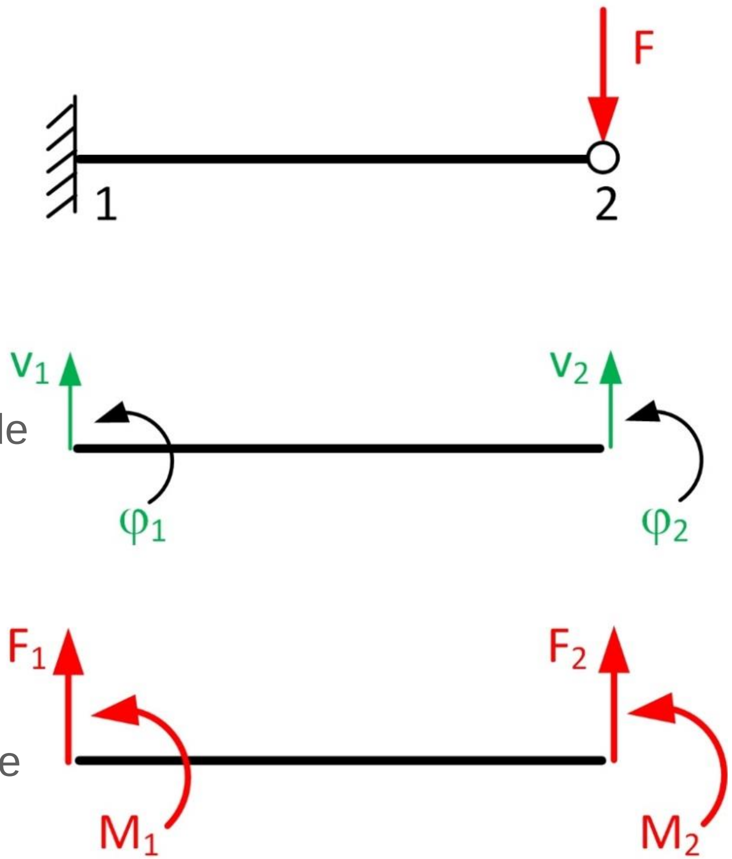
Gelenke

Beispiel: Fehlerhafte Gelenkdefinition am Ende eines Kragarms

System

Freiheitsgrade

Äußere Kräfte



Gleichungssystem

$$\frac{EI}{\ell}\begin{bmatrix} 3/\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Eigenschaften des Gleichungssystems:

- Singuläre Steifigkeitsmatrix
- Gleichungssystem ist nicht lösbar
- Aufbringen eines Moments **M_2** ist nicht sinnvoll

Gelenke

Beispiel: Fehlerhafte Gelenkdefinition am Ende eines Kragarms

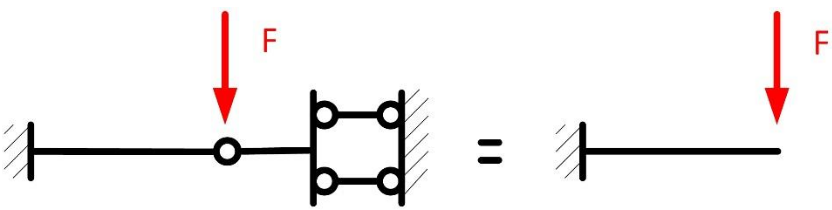
Abhilfe:

a) Festhaltung des freien Freiheitsgrades

$$\frac{EI}{\ell}\begin{bmatrix} 3/\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

$F_2 = -F$

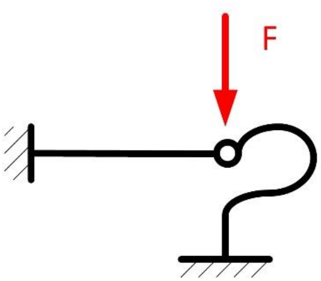
$\varphi_2 = 0$



$$3 \cdot EI/\ell^3 \cdot v_2 = -F$$

$$\boxed{v_2 = -\frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot EI}}$$

b) Steife Drehfeder an Punkt 2 anbringen



$$\begin{bmatrix} 3 \cdot EI/\ell^3 & 0 \\ 0 & k_\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Reguläre Steifigkeitsmatrix

Beispiel: Fehlerhafte Gelenkdefinition am Ende eines Kragarms

Abhilfe:

c) Elimination der (nicht sinnvollen) Gelenkdefinition

= 

$$\frac{E \cdot I}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 12/\ell^2 & 6/\ell & -12/\ell^2 & 6/\ell \\ 6/\ell & 4 & -6/\ell & 2 \\ -12/\ell^2 & -6/\ell & 12/\ell^2 & -6/\ell \\ 6/\ell & 2 & -6/\ell & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix}$$

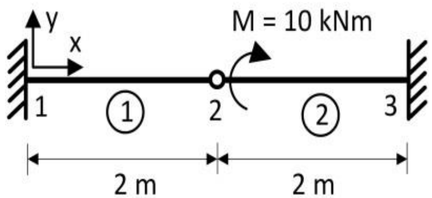
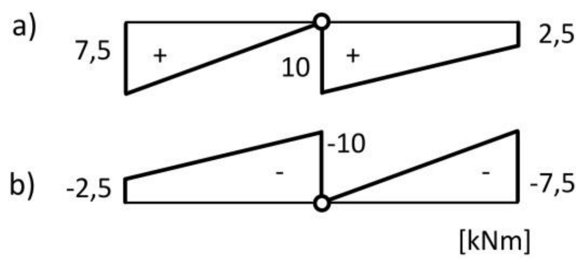
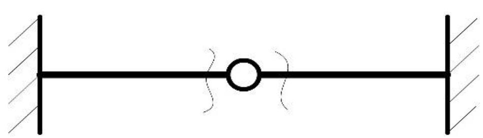
Systemsteifigkeitsmatrix

$$\frac{EI}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 12/\ell^2 & -6/\ell \\ -6/\ell & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix ist jetzt regulär

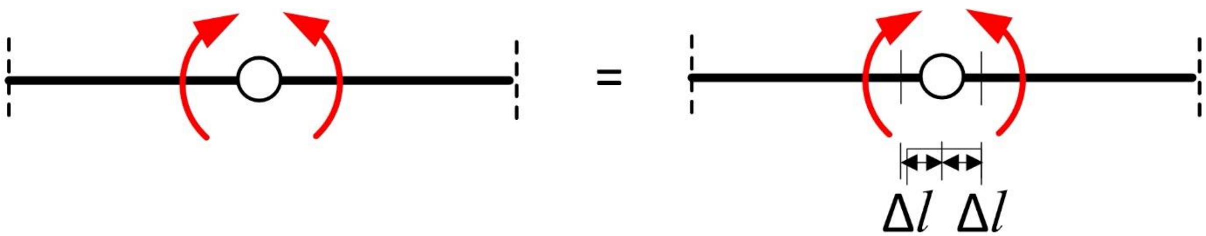
Gelenke

Beispiel: 2 Balkenelemente mit unterschiedlicher Gelenkdefinition

Gelenkdefinition		**Auswirkung**
System		Moment M wird als Belastung des Knotenpunkts 2 definiert.
Gelenk in Element 1		M wird auf Element 2 aufgebracht
Gelenk in Element 2		M wird auf Element 1 aufgebracht
Gelenk in beiden Elementen		Keine Momentenlinie! Unerlaubtes kinematisches System im Freiheitsgrad φ_2

Gelenke

Beispiel: Momentenpaar an einem Biegegelenk



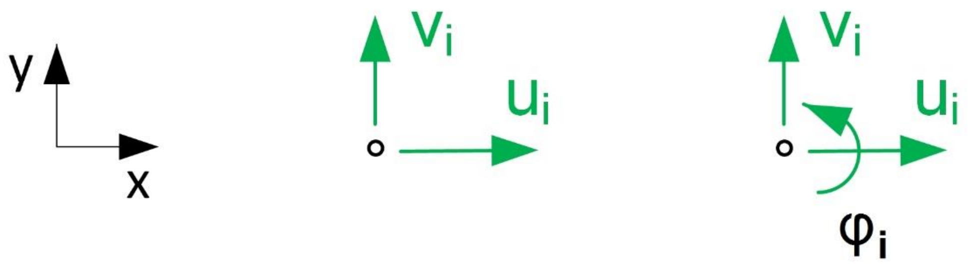
Problem: Am Knotenpunkt kann das Moment nicht aufgebracht werden.

Lösung:

- Es werden zwei kurze Balkenelemente eingefügt z.B. mit der Länge $\Delta l = 1\text{cm}$.
- Die beiden Momente werden an den neu definierten Knotenpunkten an den jeweiligen Elementenden aufgebracht.

Freiheitsgrade ebener Stabwerke

Ebene Stabwerke



Fachwerke: 2 Freiheitsgrade an jedem Knotenpunkt: u_i und v_i

Knotenpunkte, die ausschließlich mit Fachwerkelemeten und Verschiebungsfedern verbunden sind.

Balkensyssteme: 3 Freiheitsgrade an jedem Knotenpunkt: u_i, v_i und φ_i

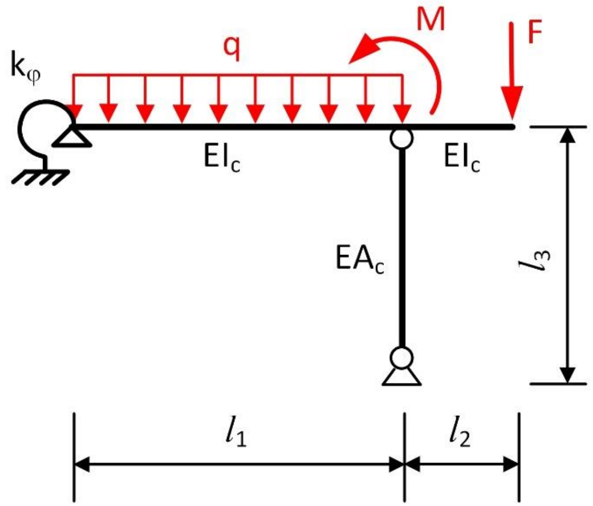
Knotenpunkte, die mit Balkenelemeten und Drehfedern verbunden sind.

.

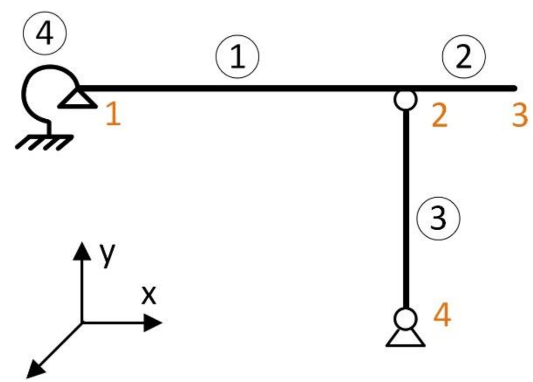
Alle anderen Freiheitsgrade müssen festgehalten warden, um Singularitäten in der Systemsteifigkeitsmatrix zu vermeiden..

Beispiel: Stabwerk

System



Nodal points and elements



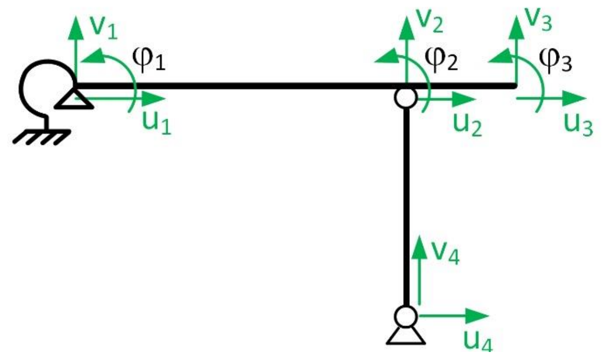
Element types

Elements 1,2 : Beam elements

Element 3 : Truss element

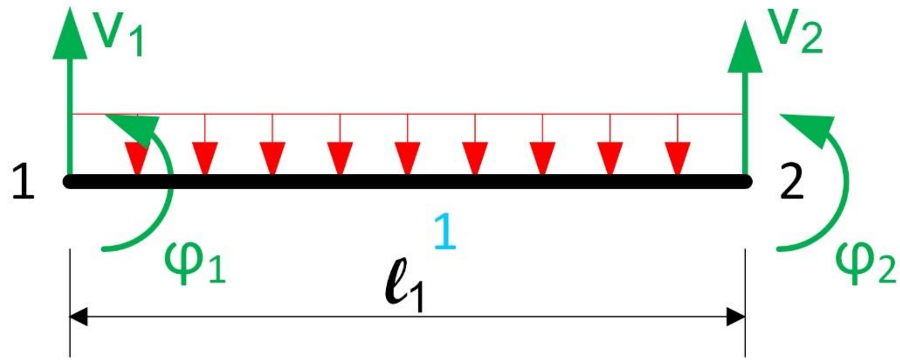
Element 4 : Spring element

Deegrees of freedom



Beispiel: Stabwerk

Element 1: Steifigkeitsmatrix des Balkenelements

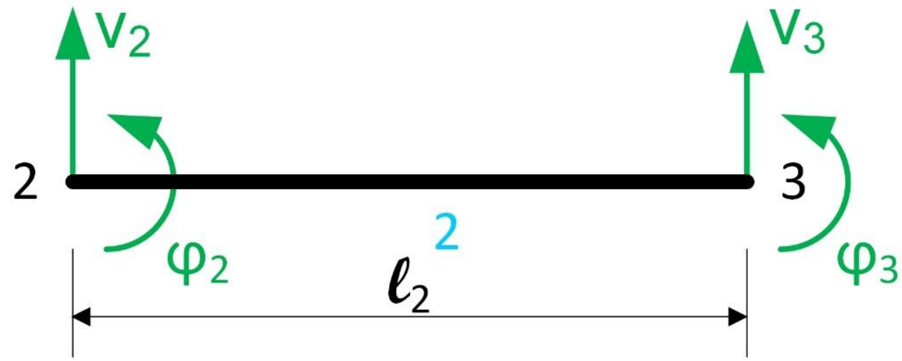


$$\frac{E \cdot I_c}{\ell_1} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -\frac{6}{\ell_1} & 2 \\ -\frac{6}{\ell_1} & \frac{12}{\ell_1^2} & -\frac{6}{\ell_1} \\ 2 & -\frac{6}{\ell_1} & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{z1}^{(1)} \\ F_{y2}^{(1)} \\ M_{z2}^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{q \cdot \ell_1^2}{12} \\ \frac{q \cdot \ell_1}{2} \\ -\frac{q \cdot \ell_1^2}{12} \end{bmatrix}$$

Festhaltebedingung **$v_1 = 0$** wurde bereits bei der Elementsteifigkeitsmatrix berücksichtigt.

Beispiel: Stabwerk

Element 2: Steifgkeitsmatrix des Stabelements

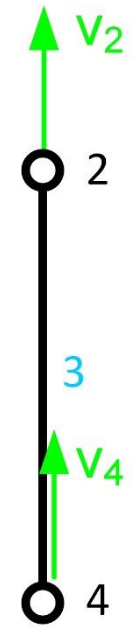


$$\frac{E \cdot I_c}{\ell_2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell_2^{\,2}} & \frac{6}{\ell_2} & -\frac{12}{\ell_2^{\,2}} & \frac{6}{\ell_2} \\ \frac{6}{\ell_2} & 4 & -\frac{6}{\ell_2} & 2 \\ -\frac{12}{\ell_2^{\,2}} & -\frac{6}{\ell_2} & \frac{12}{\ell_2^{\,2}} & -\frac{6}{\ell_2} \\ \frac{6}{\ell_2} & 2 & -\frac{6}{\ell_2} & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{y2}^{(2)} \\ M_{z2}^{(2)} \\ F_{y3}^{(2)} \\ M_{z3}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Beispiel: Stabwerk

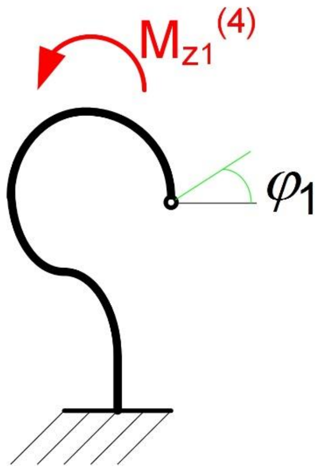
Element 3: Steifigkeitsmatrix des Fachwerkelements

$$\frac{E\cdot A_c}{\ell_3}\cdot v_2 = F_{y2}^{(3)}$$



Element 4: Steifigkeitsmatrix der Drehfeder

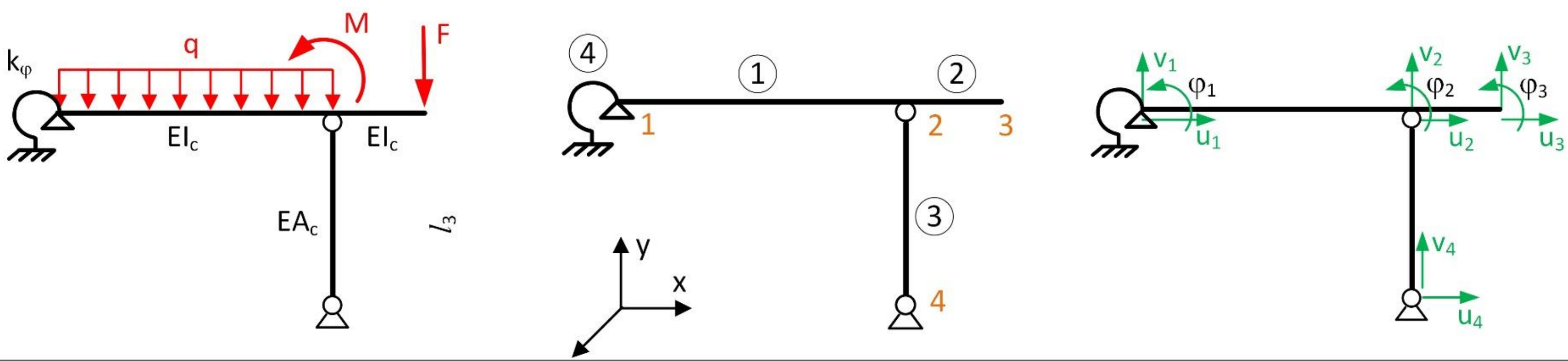
$$M_{z1}^{(4)} = k_\varphi \cdot \varphi_1$$



Beispiel: Stabwerk

Matrix mit Festhaltungen: $u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 0 \quad v_1 = 0 \quad u_4 = 0 \quad v_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ -F \\ 0 \end{bmatrix}$$



Beispiel: Stabwerk

Addition of Element 1

$$\begin{bmatrix} 4\cdot c_1 & -6\cdot\frac{c_1}{l_1} & 2\cdot c_1 & 0 & 0 \\ -6\cdot\frac{c_1}{l_1} & 12\cdot\frac{c_1}{l_1^{\,2}} & -6\cdot\frac{c_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 2\cdot c_1 & -6\cdot\frac{c_1}{l_1} & 4\cdot c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q\cdot\frac{l_1^{\,2}}{12} \\ -q\cdot\frac{l_1}{2} \\ M+q\cdot\frac{l_1^{\,2}}{12} \\ -F \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit $c_1 = EI_c/\ell_1$ und $c_2 = EI_c/\ell_2$

Element 1

Beispiel: Stabwerk

Addition von Element 2

$$\begin{bmatrix} 4\cdot c_1 & -6\cdot\frac{c_1}{l_1} & 2\cdot c_1 & 0 & 0 \\ -6\cdot\frac{c_1}{l_1} & 12\cdot\frac{c_1}{l_1^2}+12\cdot\frac{c_2}{l_2^2} & -6\cdot\frac{c_1}{l_1}+6\cdot\frac{c_2}{l_2} & -12\cdot\frac{c_2}{l_2^2} & 6\cdot\frac{c_2}{l_2} \\ 2\cdot c_1 & -6\cdot\frac{c_1}{l_1}+6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 4\cdot c_1 \ \text{-}4\cdot c_2 & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 2\cdot c_2 \\ 0 & -12\cdot\frac{c_2}{l_2^2} & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 12\cdot\frac{c_2}{l_2^2} & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} \\ 0 & 6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 2\cdot c_2 & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 4\cdot c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q\cdot\frac{l_1^2}{12} \\ -q\cdot\frac{l_1}{2} \\ M+q\cdot\frac{l_1^2}{12} \\ -F \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit $c_1 = EI_c / \ell_1$ und $c_2 = EI_c / \ell_2$

Element 2

Beispiel: Stabwerk

Addition von Element 3

$$
\begin{bmatrix}
+4\cdot c_1 & -6\cdot\frac{c_1}{l_1} & 2\cdot c_1 & 0 & 0 \\
-6\cdot\frac{c_1}{l_1} & 12\cdot\frac{c_1}{l_1^{\,2}}+12\cdot\frac{c_2}{l_2^{\,2}}+\frac{EA_c}{l_3} & -6\cdot\frac{c_1}{l_1}+6\cdot\frac{c_2}{l_2} & -12\cdot\frac{c_2}{l_2^{\,2}} & 6\cdot\frac{c_2}{l_2} \\
2\cdot c_1 & -6\cdot\frac{c_1}{l_1}+6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 4\cdot c_1+4\cdot c_2 & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 2\cdot c_2 \\
0 & -12\cdot\frac{c_2}{l_2^{\,2}} & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 12\cdot\frac{c_2}{l_2^{\,2}} & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} \\
0 & 6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 2\cdot c_2 & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 4\cdot c_2
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -q\cdot\frac{l_1^{\,2}}{12} \\ -q\cdot\frac{l_1}{2} \\ M+q\cdot\frac{l_1^{\,2}}{12} \\ -F \\ 0 \end{bmatrix}
$$

with $c_1 = EI_c / \ell_1$ and $c_2 = EI_c / \ell_2$

Element 3

Beispiel: Stabwerk

Addition von Element 4

$$
\begin{bmatrix}
k_\varphi + 4\cdot c_1 & -6\cdot\frac{c_1}{l_1} & 2\cdot c_1 & 0 & 0 \\
-6\cdot\frac{c_1}{l_1} & 12\cdot\frac{c_1}{l_1^2}+12\cdot\frac{c_2}{l_2^2}+\frac{EA_c}{l_3} & -6\cdot\frac{c_1}{l_1}+6\cdot\frac{c_2}{l_2} & -12\cdot\frac{c_2}{l_2^2} & 6\cdot\frac{c_2}{l_2} \\
2\cdot c_1 & -6\cdot\frac{c_1}{l_1}+6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 4\cdot c_1+4\cdot c_2 & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 2\cdot c_2 \\
0 & -12\cdot\frac{c_2}{l_2^2} & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 12\cdot\frac{c_2}{l_2^2} & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} \\
0 & 6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 2\cdot c_2 & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 4\cdot c_2
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
\varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-q\cdot\frac{l_1^2}{12} \\ -q\cdot\frac{l_1}{2} \\ M+q\cdot\frac{l_1^2}{12} \\ -F \\ 0
\end{bmatrix}
$$

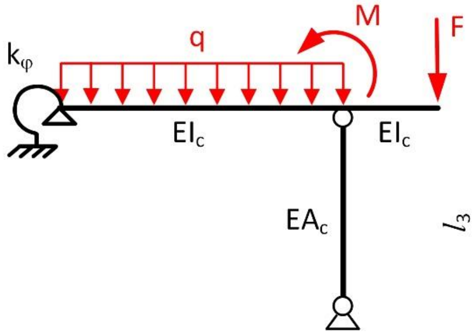
mit $c_1 = EI_c / \ell_1$ und $c_2 = EI_c / \ell_2$

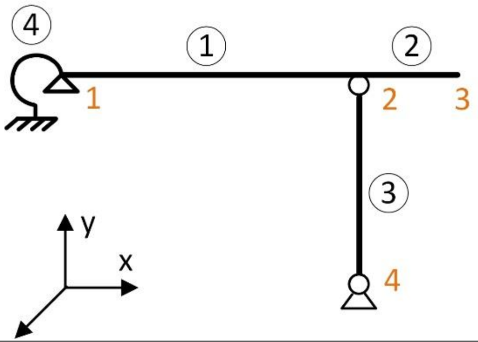
Element 4

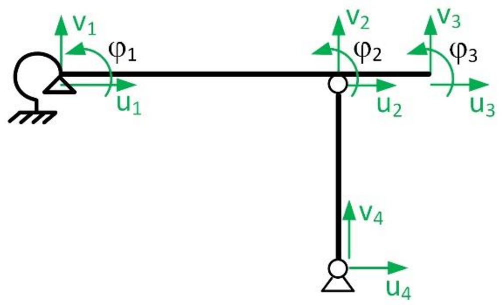
Beispiel: Stabwerk

Systemsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} k_\varphi + 4\cdot c_1 & -6\cdot\frac{c_1}{l_1} & 2\cdot c_1 & 0 & 0 \\ -6\cdot\frac{c_1}{l_1} & 12\cdot\frac{c_1}{l_1^2}+12\cdot\frac{c_2}{l_2^2}+\frac{EA_c}{l_3} & -6\cdot\frac{c_1}{l_1}+6\cdot\frac{c_2}{l_2} & -12\cdot\frac{c_2}{l_2^2} & 6\cdot\frac{c_2}{l_2} \\ 2\cdot c_1 & -6\cdot\frac{c_1}{l_1}+6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 4\cdot c_1+4\cdot c_2 & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 2\cdot c_2 \\ 0 & -12\cdot\frac{c_2}{l_2^2} & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 12\cdot\frac{c_2}{l_2^2} & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} \\ 0 & 6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 2\cdot c_2 & -6\cdot\frac{c_2}{l_2} & 4\cdot c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q\cdot\frac{l_1^2}{12} \\ -q\cdot\frac{l_1}{2} \\ M+q\cdot\frac{l_1^2}{12} \\ -F \\ 0 \end{bmatrix}$$







Räumliches Fachwerkelement

Elementsteifigkeitsmatrix

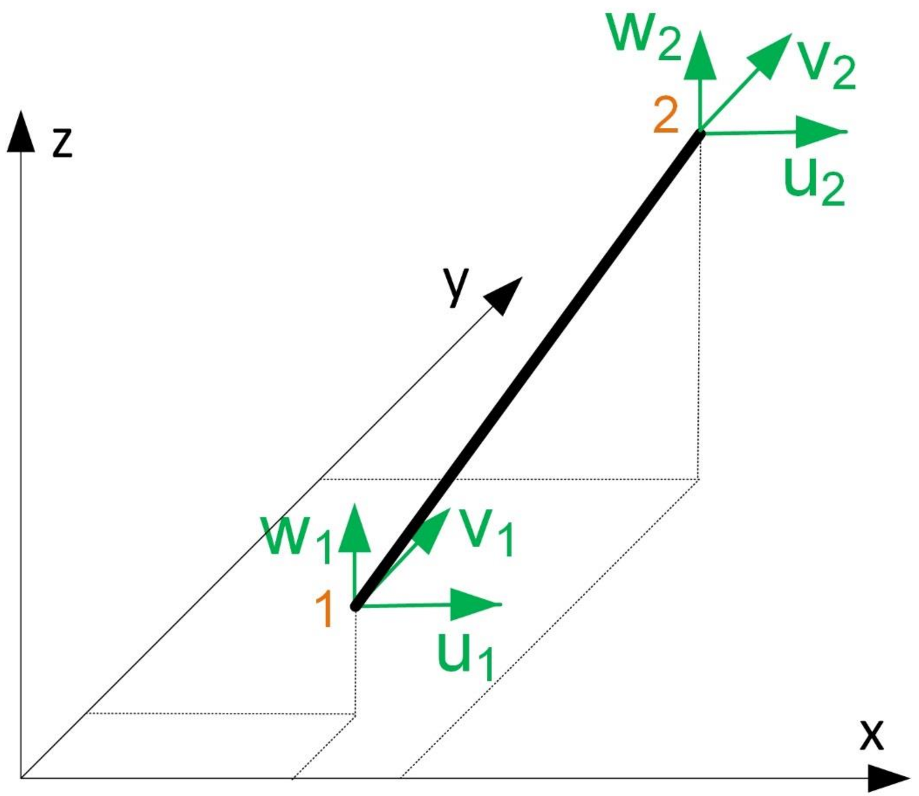
3 Freiheitsgrade am jedem Knotenpunkt:

→ 6 x 6 Matrix

Herleitung:

- 3D Koordinatentransformation der lokalen Steifigkeitsmatrix

$$\underline{K}_{3D} = \underline{T}_{3D}^{T} \cdot \underline{K}^{(lok)} \cdot \underline{T}_{3D}$$



Räumliches Balkenelement

Elementsteifigkeitsmatrix

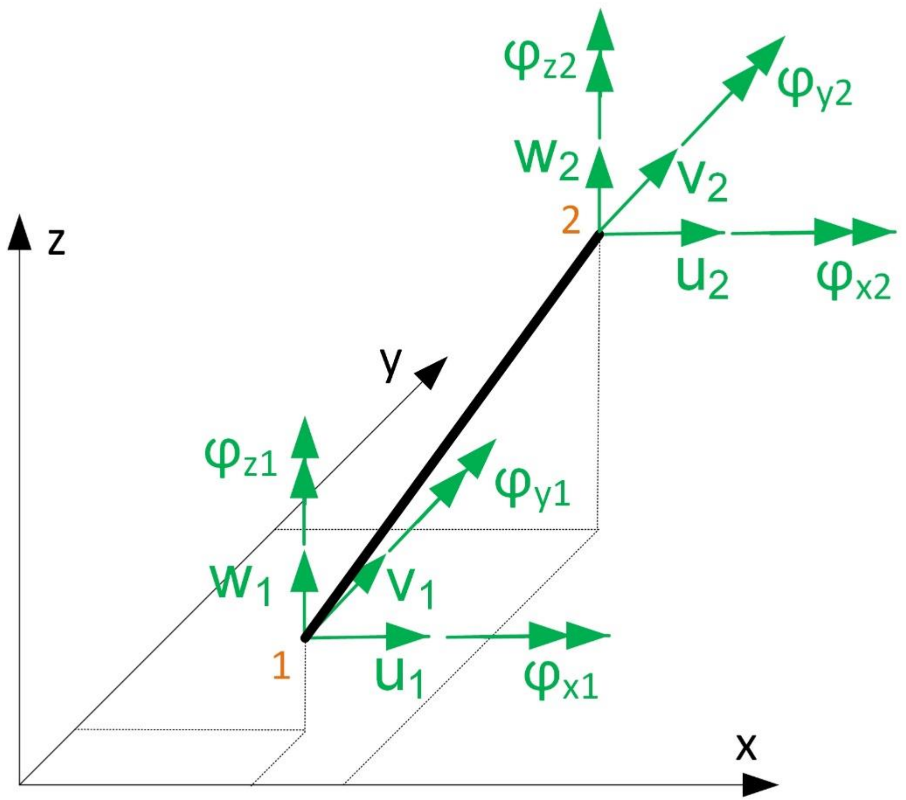
6 Freiheitsgrade an jedem Knotenpunkt

→ 12 x 12 Matrix

Herleitung

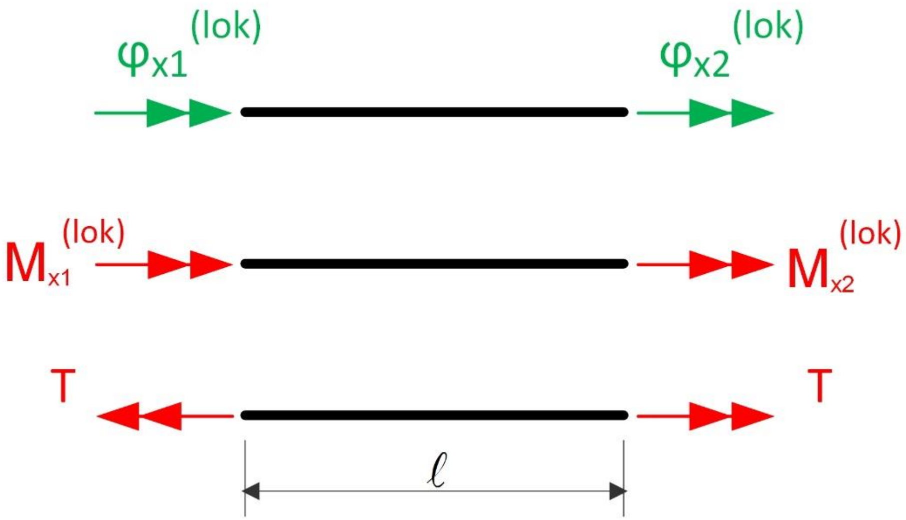
- Ergänzung der zweidimensionalen lokalen Steifigkeitsmatrix durch Querbiegung und Torsion.
- Räumliche Koordinatentransformation

$$\underline{K}_{3D} = \underline{T}_{3D}^{T} \cdot \underline{K}^{(lok)} \cdot \underline{T}_{3D}$$



Räumliches Balkenelement

Steifigkeitsmatrix eines torsionsbeanspruchten Elements (St. Venant)



$$\varphi = \left(\varphi_{x2}^{(lok)} - \varphi_{x1}^{(lok)}\right) = \frac{\ell}{G \cdot I_T} \cdot T$$

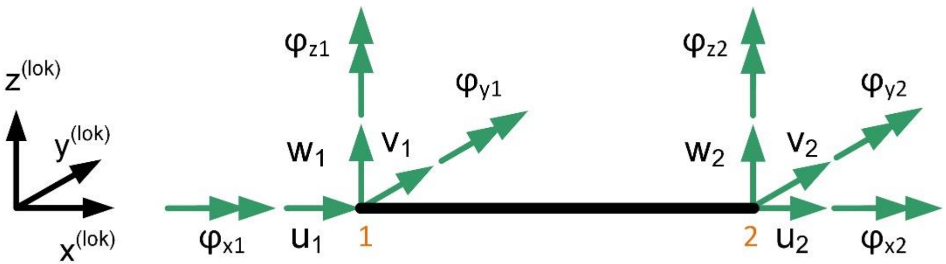
$$M_{x1}^{(lok)} = -T = \frac{G \cdot I_T}{\ell} \cdot \left(\varphi_{x1}^{(lok)} - \varphi_{x2}^{(lok)} \right)$$

$$M_{x2}^{(lok)} = T = \frac{G \cdot I_T}{\ell} \cdot \left(-\varphi_{x1}^{(lok)} + \varphi_{x2}^{(lok)} \right)$$

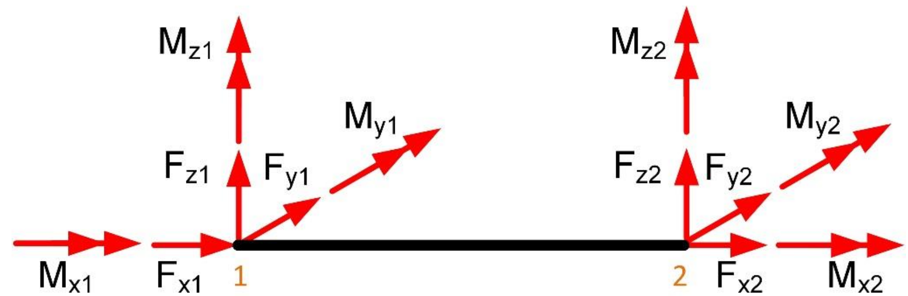
$$\frac{G \cdot I_T}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{x1}^{(lok)} \\ \varphi_{x2}^{(lok)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{x1}^{(lok)} \\ M_{x2}^{(lok)} \end{bmatrix}$$

Räumliches Balkenelement

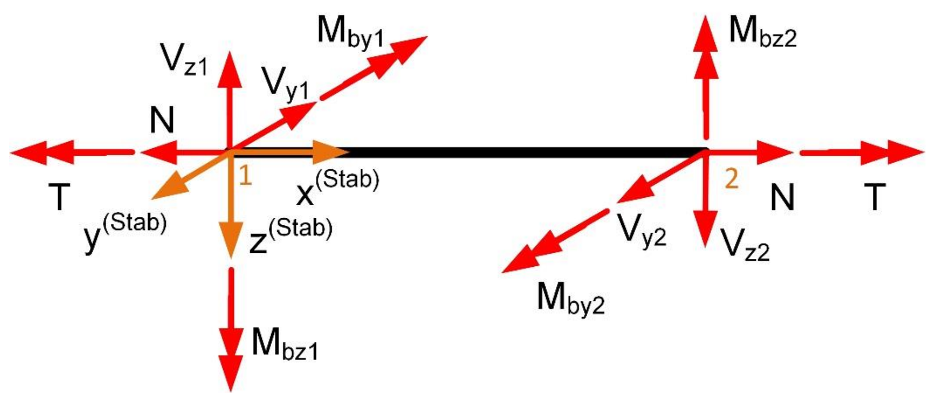
Freiheitsgrade und Stabendkräfte



Verschiebungen u. Verdrehungen



Kräfte und Momente



Schnittgrößen

Räumliches Balkenelement

$$
\begin{bmatrix}
\frac{E\cdot A}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E\cdot A}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12\cdot E\cdot I_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I_z}{l^2} & 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I_z}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{12\cdot E\cdot I_y}{l^3} & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I_y}{l^3} & 0 & -\frac{6\cdot E\cdot I_z}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{G\cdot I_T}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G\cdot I_T}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6\cdot E\cdot I_y}{l^2} & 0 & \frac{4\cdot E\cdot I_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I_y}{l^2} & 0 & \frac{2\cdot E\cdot I_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6\cdot E\cdot I_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4\cdot E\cdot I_z}{l} & 0 & -\frac{6\cdot E\cdot I_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\cdot E\cdot I_z}{l} \\
-\frac{E\cdot A}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E\cdot A}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12\cdot E\cdot I_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\cdot E\cdot I_z}{l^3} & 0 & \frac{12\cdot E\cdot I_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\cdot E\cdot I_z}{l^3} \\
0 & 0 & -\frac{12\cdot E\cdot I_y}{l^3} & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12\cdot E\cdot I_y}{l^3} & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{G\cdot I_T}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G\cdot I_T}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6\cdot E\cdot I_y}{l^2} & 0 & \frac{2\cdot E\cdot I_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6\cdot E\cdot I_y}{l^2} & 0 & \frac{4\cdot E\cdot I_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6\cdot E\cdot I_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\cdot E\cdot I_z}{l} & 0 & -\frac{6\cdot E\cdot I_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4\cdot E\cdot I_z}{l}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ \varphi_{z2} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix}
$$

Ende

Einführung

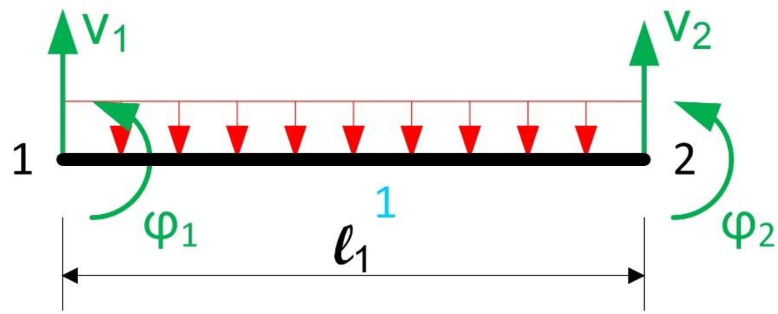
2 Stabtragwerke

Flächentragwerke

Modellbildung

Beispiel: Stabwerk

Element 1: Steifigkeitsmatrix des Balkenelements

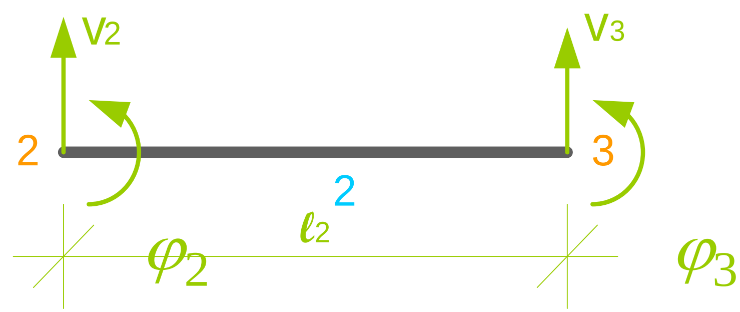


$$\frac{E \cdot I_c}{\ell_1} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -\frac{6}{\ell_1} & 2 \\ -\frac{6}{\ell_1} & \frac{12}{\ell_1^2} & -\frac{6}{\ell_1} \\ 2 & -\frac{6}{\ell_1} & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{z1}^{(1)} \\ F_{y2}^{(1)} \\ M_{z2}^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{q \cdot \ell_1^2}{12} \\ \frac{q \cdot \ell_1}{2} \\ -\frac{q \cdot \ell_1^2}{12} \end{bmatrix}$$

Restraint condition **v_1=0** already considered in the element stiffness matrix

Beispiel: Stabwerk

Element 2: Steifigkeitsmatrix des Balkenelements



$$\frac{E \cdot I_c}{\ell_2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell_2^{\,2}} & \frac{6}{\ell_2} & -\frac{12}{\ell_2^{\,2}} & \frac{6}{\ell_2} \\ \frac{6}{\ell_2} & 4 & -\frac{6}{\ell_2} & 2 \\ -\frac{12}{\ell_2^{\,2}} & -\frac{6}{\ell_2} & \frac{12}{\ell_2^{\,2}} & -\frac{6}{\ell_2} \\ \frac{6}{\ell_2} & 2 & -\frac{6}{\ell_2} & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{y2}^{(2)} \\ M_{z2}^{(2)} \\ F_{y3}^{(2)} \\ M_{z3}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Beispiel: Stabwerk

Element 3: Steifigkeitsmatrix des Fachwerkelements

$$\frac{E \cdot A_c}{\ell_3} \cdot v_2 = F_{y2}^{(3)}$$

Element 4: Steifigkeit der Drehfeder

$$M_{z1}^{(4)} = k_\varphi \cdot \varphi_1$$