
Finite Elemente in der Baustatik

Einführung

2 Stabtragwerke

Flächentragwerke

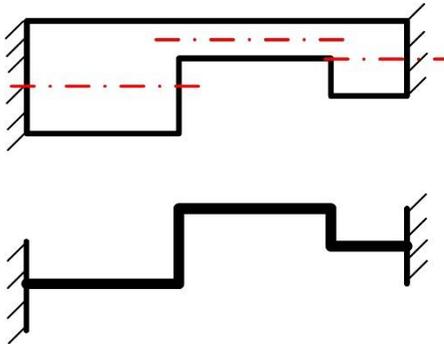
Modellbildung

Stabtragwerke

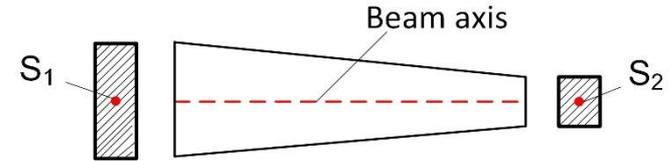
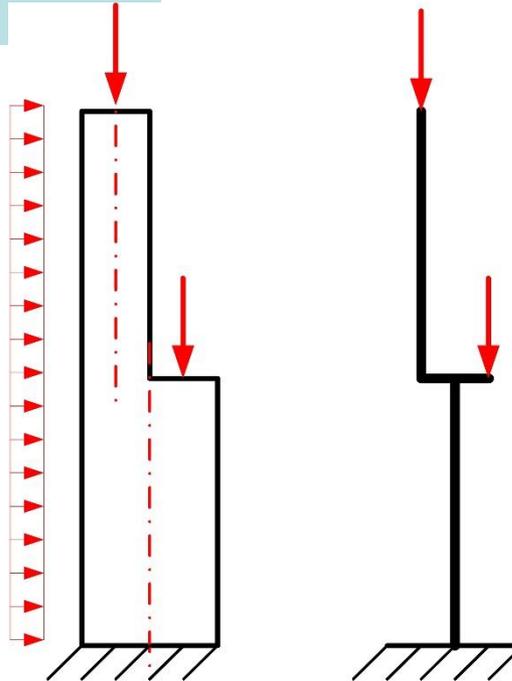
Lage der Stabachse

Definition: Die Stabachse ist die Verbindungslinie der Schwerpunkte des Anfangs- und Endquerschnitts eines Stababschnitts.

Systeme mit einer Exzentrizität der Stabachse



Beam element



Modellbildung

- Kinematische Kopplung (MPC)
- Balkenelemente mit (künstlich) großer Steifigkeit einfügen
- Balkenelemente mit exzentrischer Stabachse verwenden

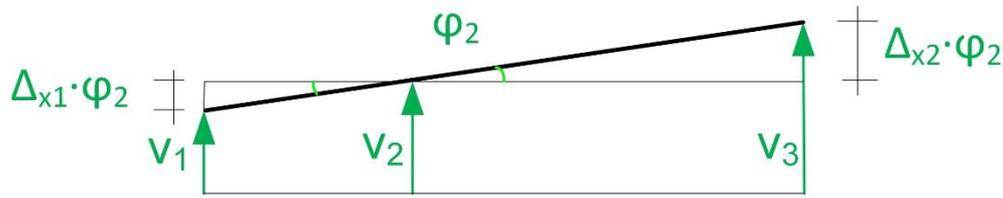
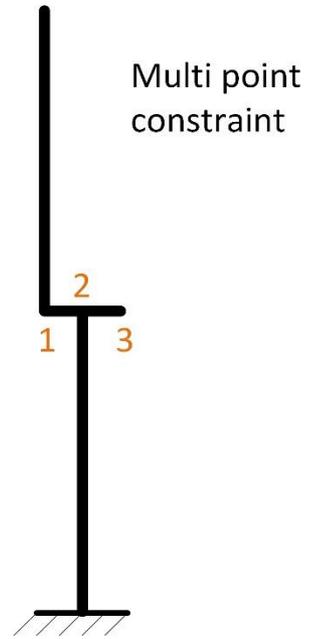
Stabtragwerke

Lage der Stabachse

Modellierung der Exzentrizität als kinematische Kopplung

Beispiel:

Kopplung der Knotenpunkte 1 und 3 (Slaves) an den Knotenpunkt 2 (Master)



Kopplungsbedingungen:

$$u_1 = u_2$$

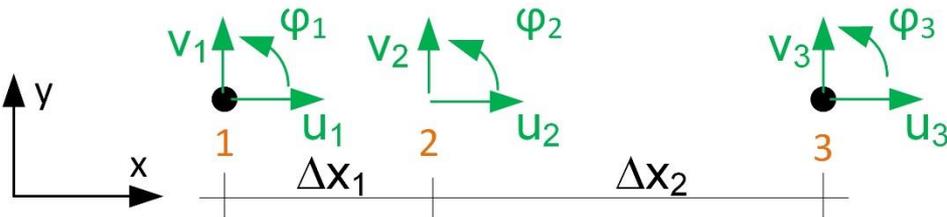
$$u_3 = u_2$$

$$v_1 = v_2 - \Delta x_1 \cdot \varphi_2$$

$$v_3 = v_2 + \Delta x_2 \cdot \varphi_2$$

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\varphi_3 = \varphi_2$$

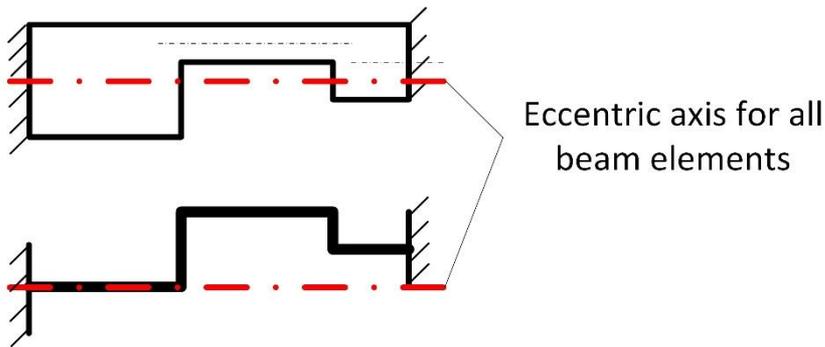


Stabtragwerke

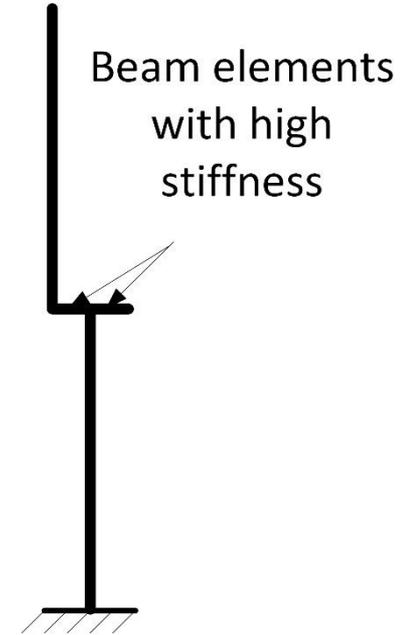
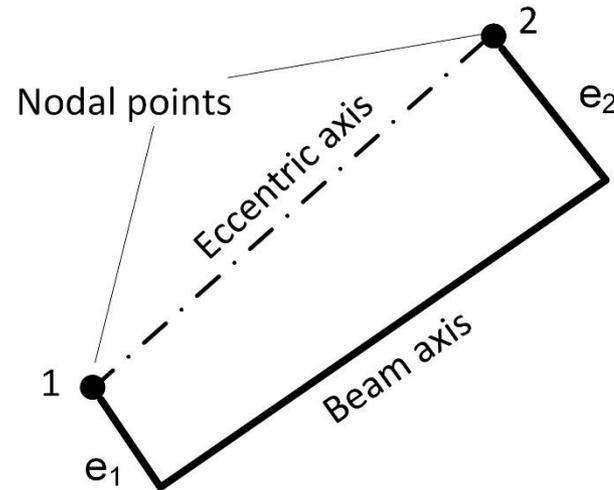
Modellierung der Exzentrizität durch Balkenelemente mit großer Steifigkeit

Um numerische Probleme zu vermeiden, sollte sich die gewählte (große) Steifigkeit nicht um mehrere Größenordnungen (Zehnerpotenzen) von den Balkensteifigkeiten im System unterscheiden.

Modellierung durch Balkenelemente mit exzentrischer Lage der Achse



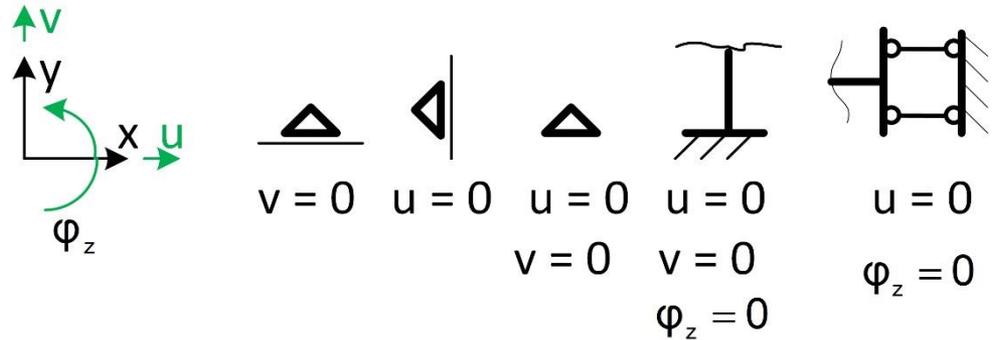
Beam element with a jump in the beam axis



Auflager

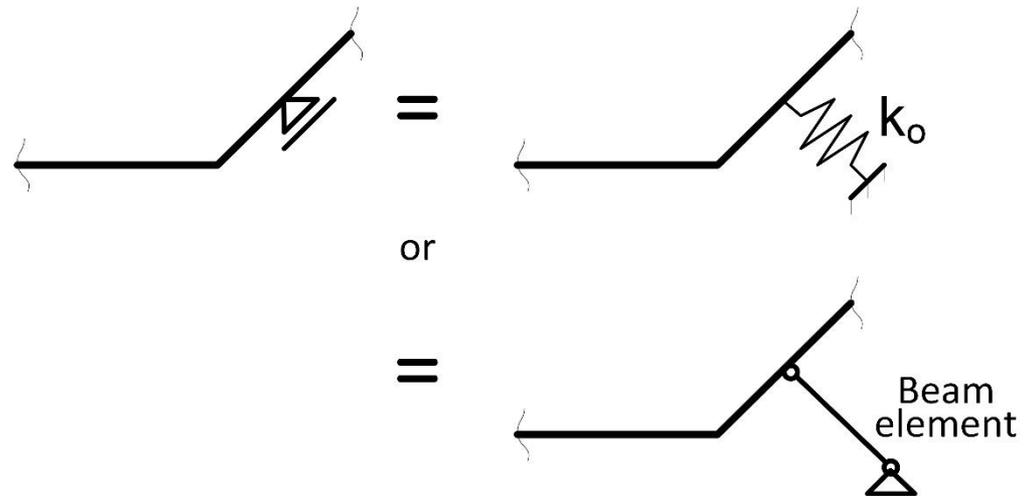
Lagerung in Richtung des globalen Koordinatensystems

Definition durch Festhaltung einzelner Freiheitsgrade



Modellierung geneigter Auflager

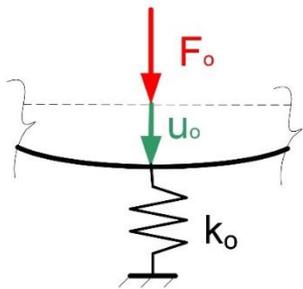
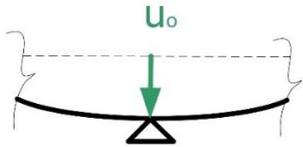
- Kinematische Kopplung
- Feder mit großer Steifigkeit
- Fachwerkelement mit großer Steifigkeit



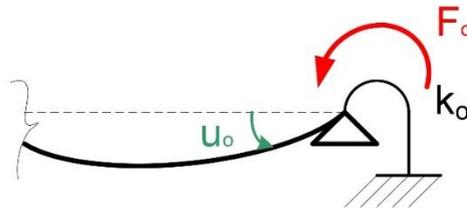
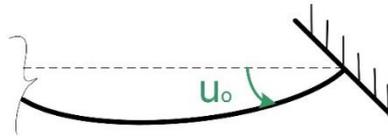
Auflager

Auflagerverschiebungen und -verdrehungen

Support displacement

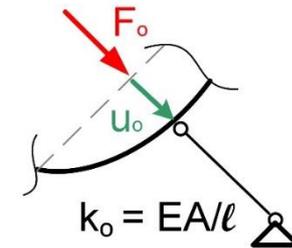
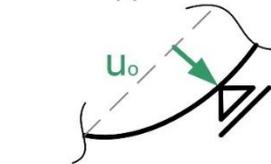


Support rotation



Artificial spring with large stiffness

Prescribed displacement of an inclined support



Artificial truss element with large stiffness

Modellbildung:

- Einführung der kinematischen Bedingungen in das globale Gleichungssystem
- Künstliche Feder mit hoher Steifigkeit k_0 und einer großen Kraft $F_0 = k_0 \cdot u_0$
- Fachwerkelement mit hoher Steifigkeit wie Federelement

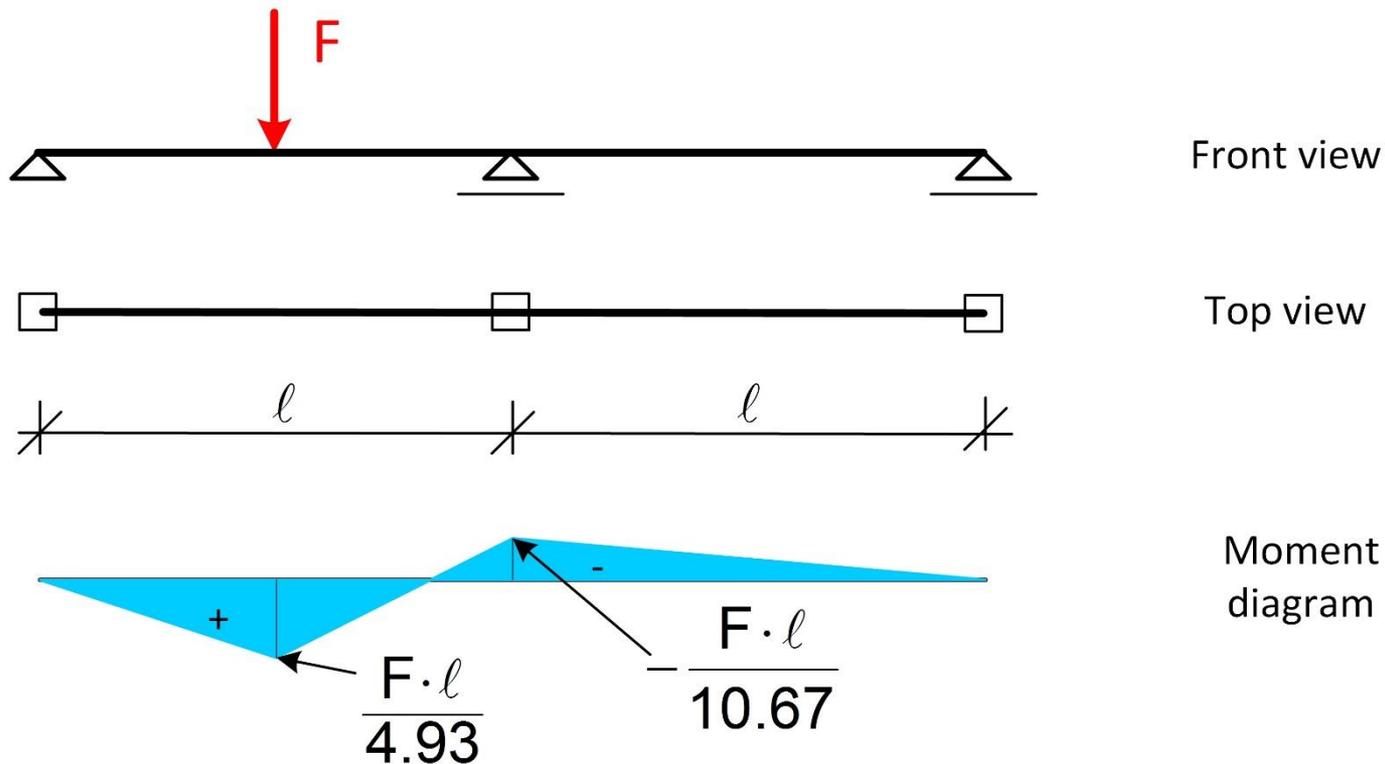
$$F_0 = k_0 \cdot u_0$$

k_0 muss so groß gewählt werden, dass die äußere Kraft F_0 fast vollständig in die Feder eingeleitet wird.

Auflager

Beispiel: Einfluss von Auflagerbedingungen

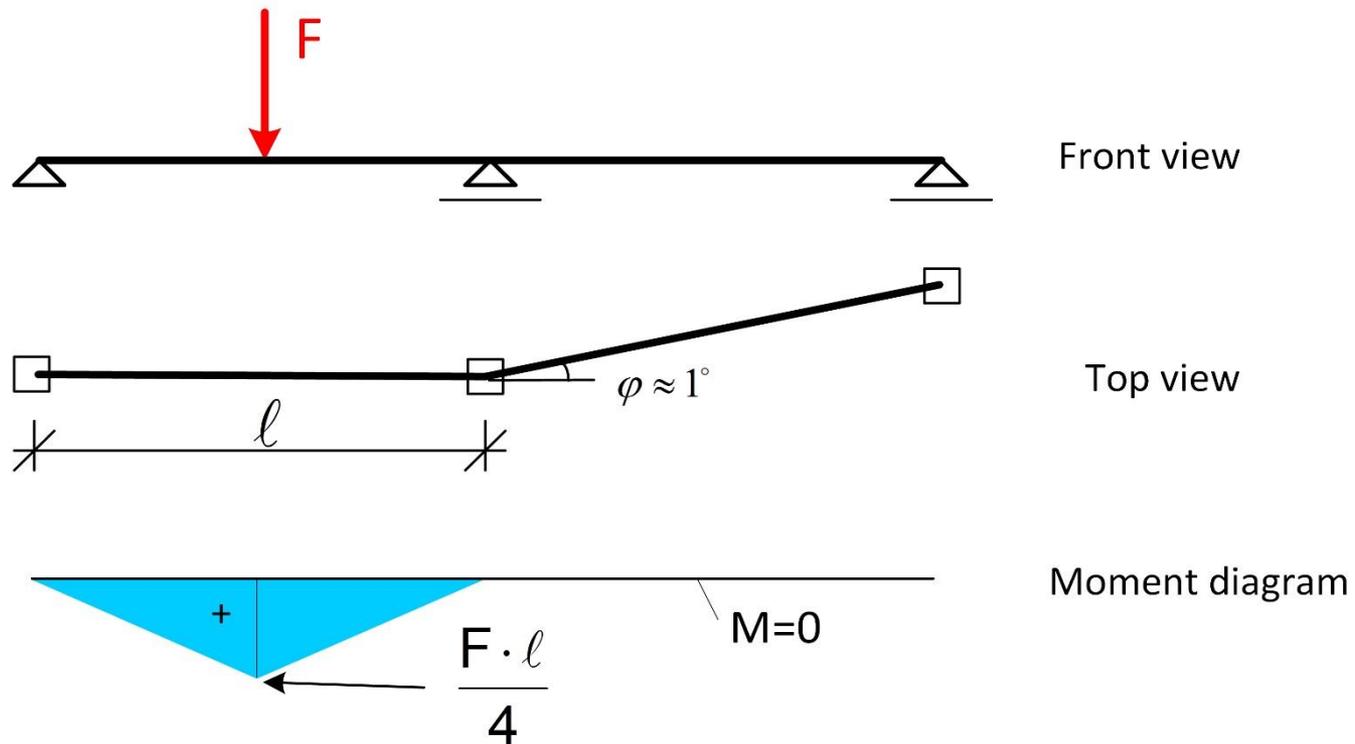
Fall 1: 2D-Modell eines Durchlaufträgers



Auflager

Beispiel: Einfluss von Auflagerbedingungen

Fall 2: Allseitig gelenkig gelagerter 3D-Balken

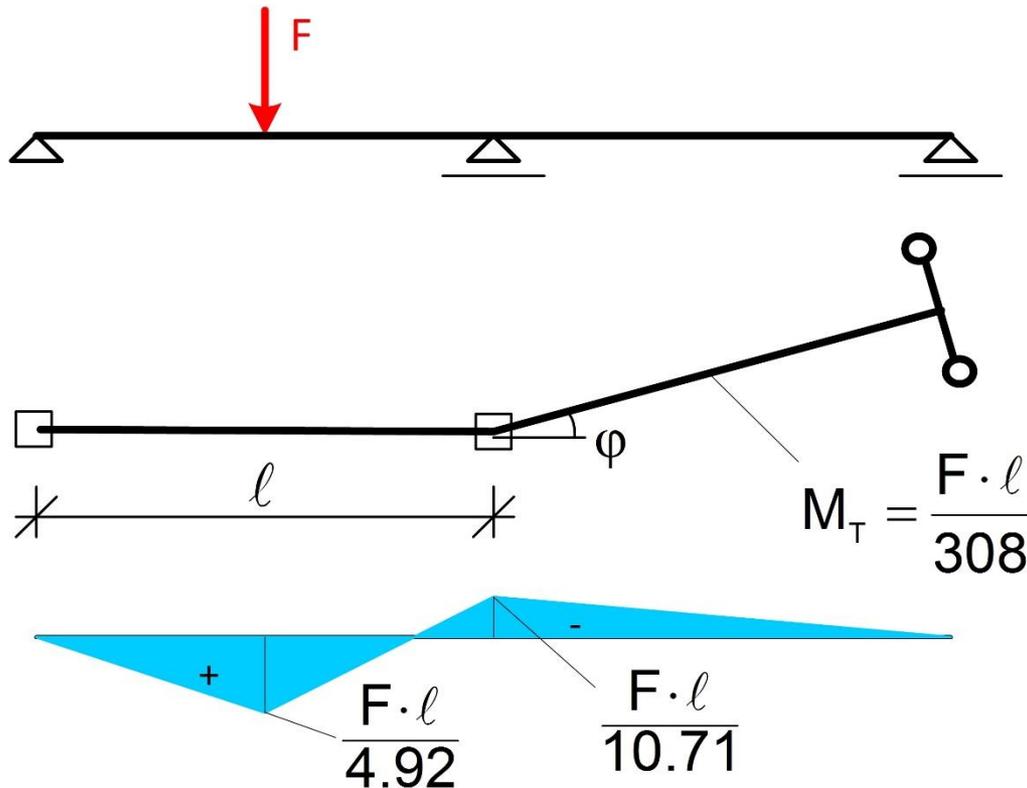


Momentengleichgewicht

Auflager

Beispiel: Einfluss von Auflagerbedingungen

Fall 3: 3D-Modell eines Durchlaufträgers mit Torsionseinspannung am rechten Lager

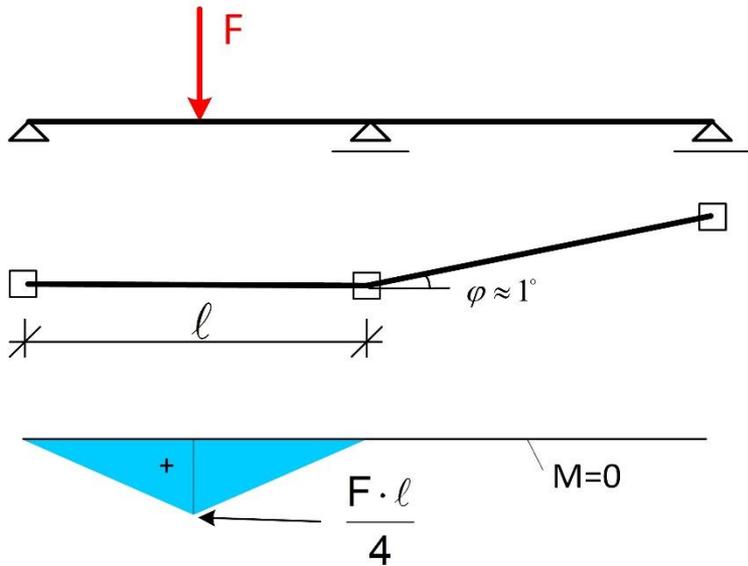


Bei einem Winkel $\varphi \neq 0$ ist eine Festhaltung des Torsionsfreiheitsgrades am rechten Lager erforderlich, damit das Biegemoment M_{ij} aufgenommen werden kann!

Auflager

Beispiel: Einfluss von Auflagerbedingungen

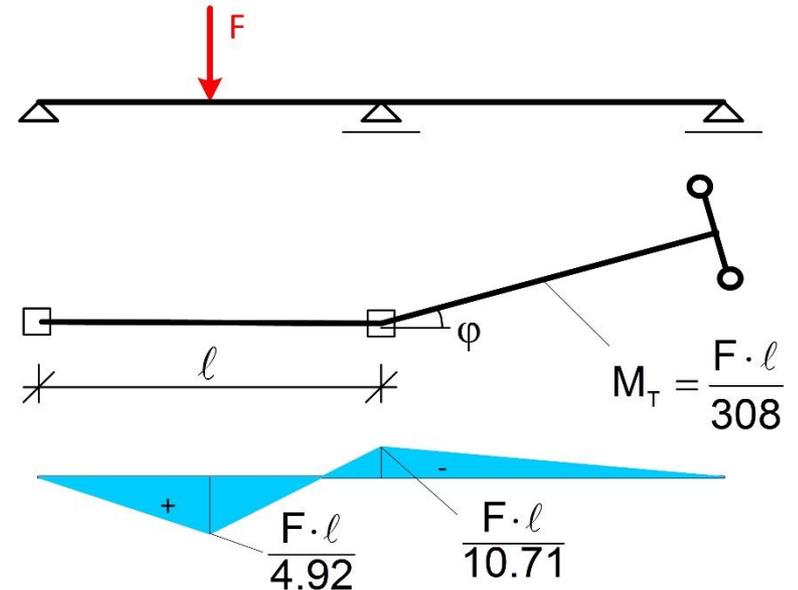
Ergebnis



Front view

Top view

Moment diagram

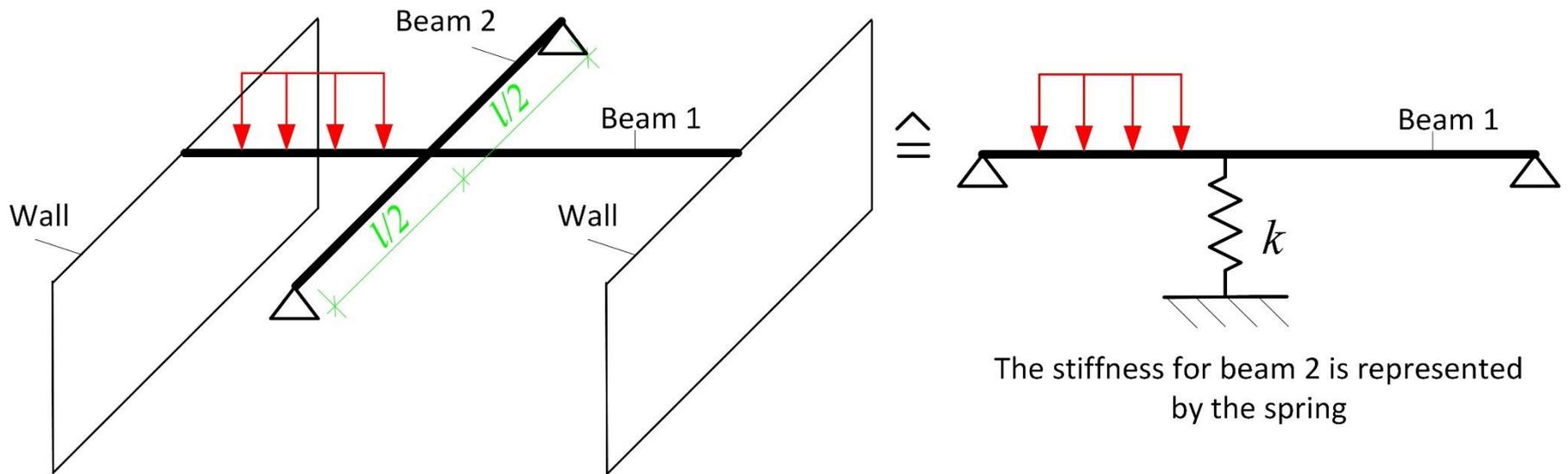


Bei dreidimensionalen Systemen müssen die Lagerbedingungen sorgfältig modelliert werden !

Federn

Verschiebungs- und Drehfedern ermöglichen die Modellierung einer elastischen Nachgiebigkeit von Auflagern bzw. einer elastischen Einspannung .

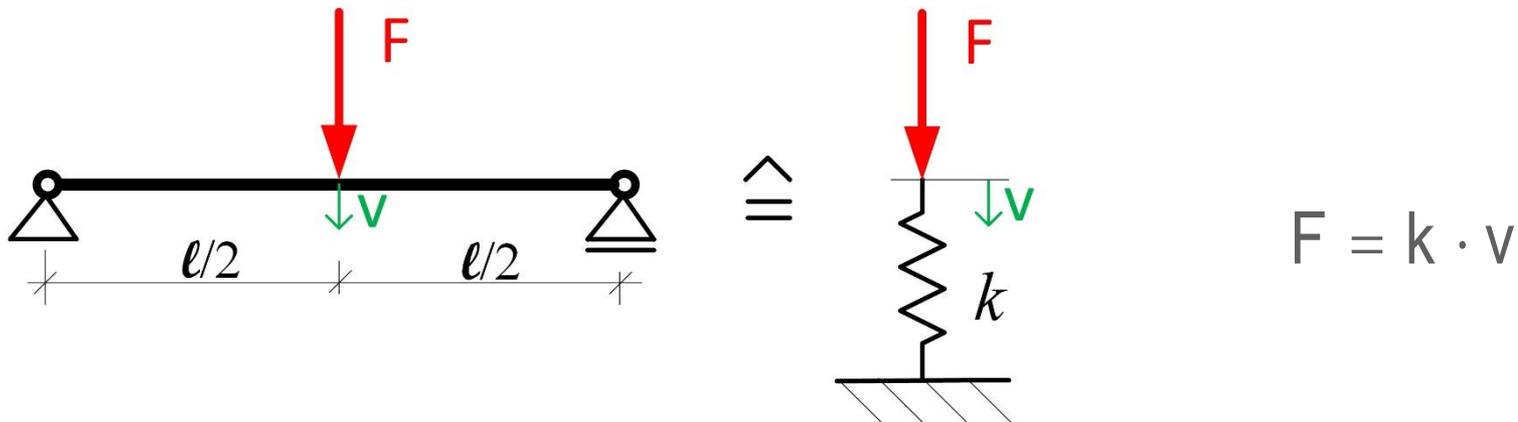
Beispiel: Modellierung der Unterstützung durch Balken als Feder



Anstelle eines räumlichen Systems ist nur ein ebenes System zu berechnen.

Federn

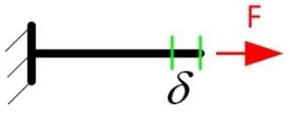
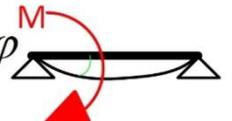
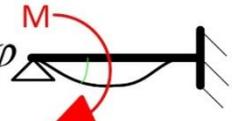
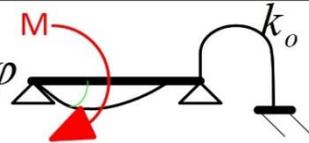
Beispiel: Modellierung der Unterstützung durch Balken als Feder



$$v = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} \quad \longrightarrow \quad F = \frac{48 \cdot E \cdot I}{l^3} \cdot v \quad \longrightarrow \quad k = \frac{48 \cdot E \cdot I}{l^3}$$

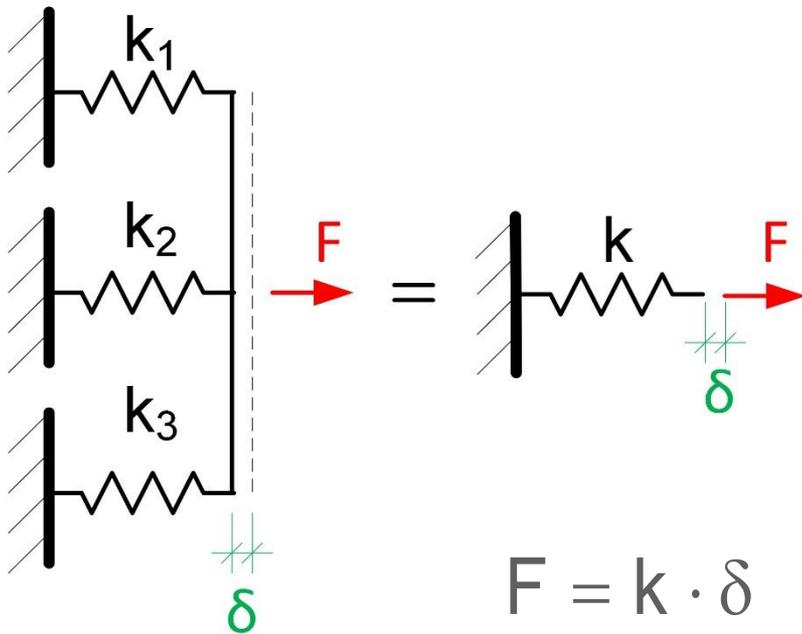
Federn

Ersatz von anschließenden Balken durch äquivalente Federn

System		Spring constant
	$F = k_v \cdot \delta$	$k_v = \frac{E \cdot A}{l}$
	$M = k_\varphi \cdot \varphi$	$k_\varphi = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l}$
	$M = k_\varphi \cdot \varphi$	$k_\varphi = \frac{4 \cdot E \cdot I}{l}$
	$M = k_\varphi \cdot \varphi$	$k_\varphi = \frac{4 \cdot l \cdot k_o + 12 \cdot E \cdot I}{4 \cdot l + l^2 \cdot k_o / E \cdot I}$
EA = Longitudinal stiffness EI = Bending stiffness		l = Length of a beam k_φ = Rotational spring constant

Federn

Parallelgeschaltete Federn



Kräfte in den einzelnen Federn:

$$F_1 = \frac{k_1}{k} \cdot F$$

$$F_2 = \frac{k_2}{k} \cdot F$$

$$F_3 = \frac{k_3}{k} \cdot F$$

Federkonstante:

$$k = k_1 + k_2 + k_3$$

Bedingung: Alle Federn haben dieselbe Verschiebung

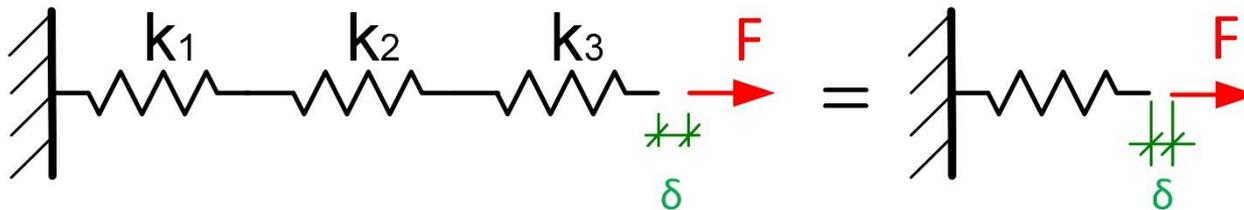
Herleitung:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \quad F_1 = k_1 \cdot \delta \quad F_2 = k_2 \cdot \delta \quad F_3 = k_3 \cdot \delta$$

$$k \cdot \delta = k_1 \cdot \delta + k_2 \cdot \delta + k_3 \cdot \delta \Rightarrow k = k_1 + k_2 + k_3 \quad \text{with } \delta = F / k$$

Federn

In Reihe geschaltete Federn



Kräfte in den
einzelnen Federn:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F$$

Federkonstante:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$

Bedingung: Alle Federn haben dieselbe Kraft

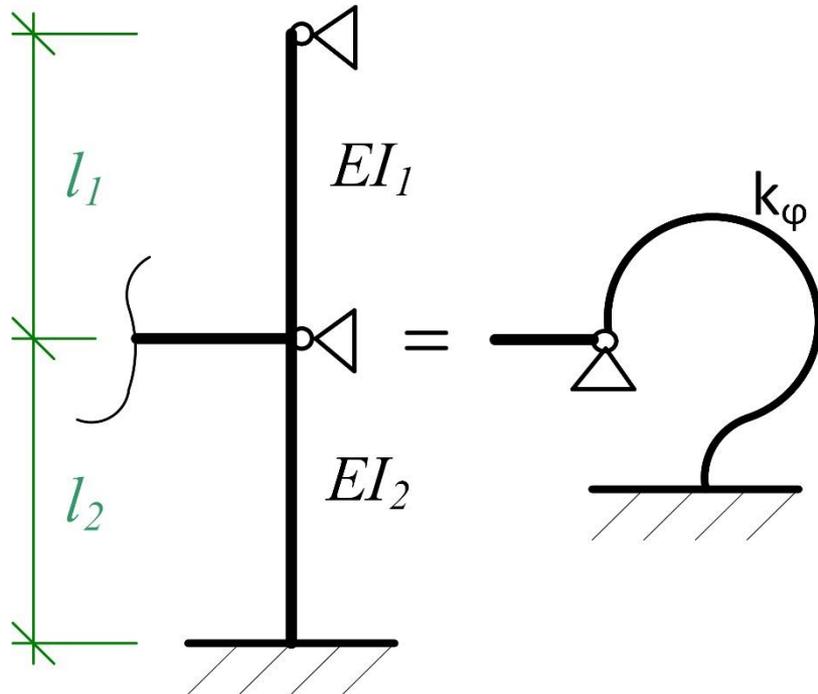
Herleitung:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \quad \delta_1 = F/k_1 \quad \delta_2 = F/k_2 \quad \delta_3 = F/k_3$$

$$F/k = F/k_1 + F/k_2 + F/k_3 \quad \Rightarrow \quad 1/k = 1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3$$

Federn

Beispiel: Elastische Einspannung eines Balkens beam



Reales System

Ersatzsystem

Die Biegesteifigkeiten der Stäbe 1 und 2 werden durch Drehfedern dargestellt:

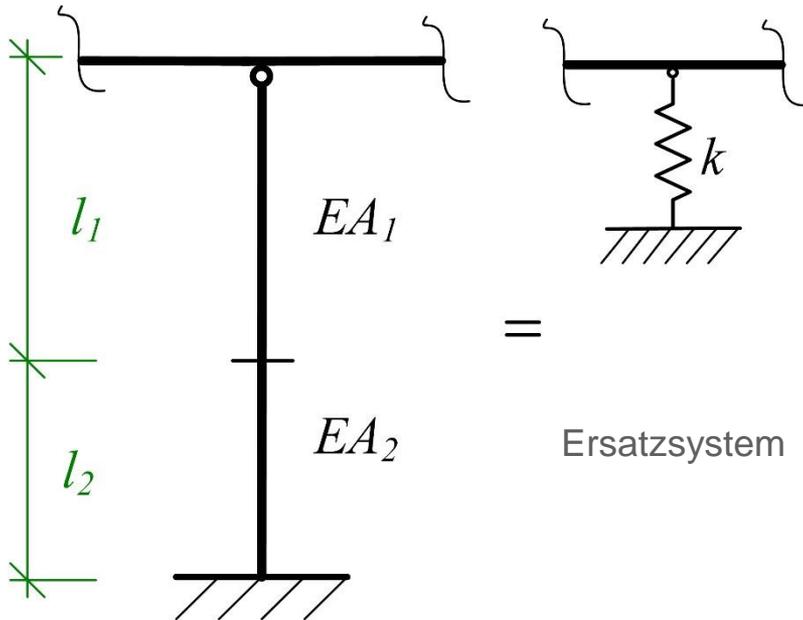
$$k_{\varphi 1} = \frac{3 \cdot E \cdot I_1}{l_1} \quad k_{\varphi 2} = \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l_2}$$

Parallelgeschaltete Federn:

$$k_{\varphi} = k_{\varphi 1} + k_{\varphi 2} = \frac{3 \cdot E \cdot I_1}{l_1} + \frac{4 \cdot E \cdot I_2}{l_2}$$

Federn

Beispiel: Stütze mit veränderlichem Querschnitt



Reales System

Ersatzsystem

Die Steifigkeiten der beiden Abschnitte der Stütze werden durch Federn dargestellt:

$$k_1 = \frac{E \cdot A_1}{l_1} \quad k_2 = \frac{E \cdot A_2}{l_2}$$

In Reihe geschaltete Federn:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{l_1}{E \cdot A_1} + \frac{l_2}{E \cdot A_2}$$

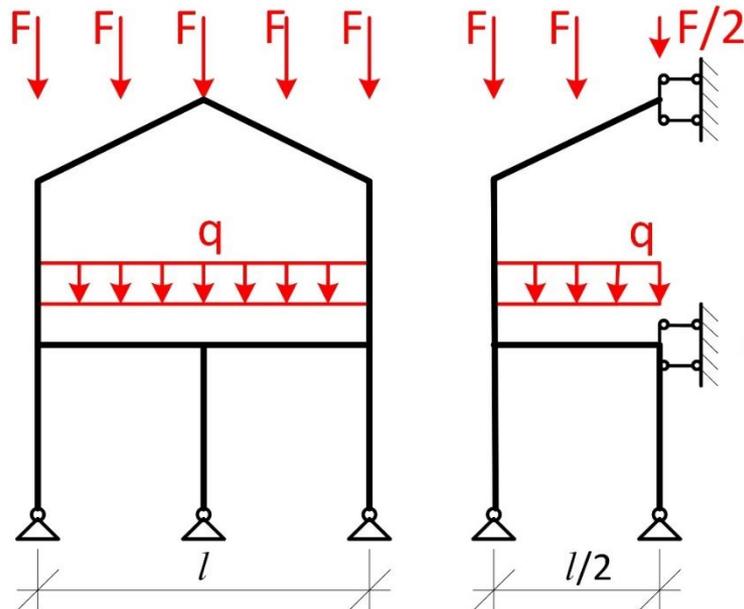
$$k = \frac{E \cdot A_1 \cdot A_2}{A_2 \cdot l_1 + A_1 \cdot l_2}$$

Symmetrische Systeme

Bei großen symmetrischen Finite-Element-Modellen kann der Rechenaufwand durch Ausnutzung der Symmetrie deutlich verringert werden.

Beispiel: Symmetrischer Rahmen

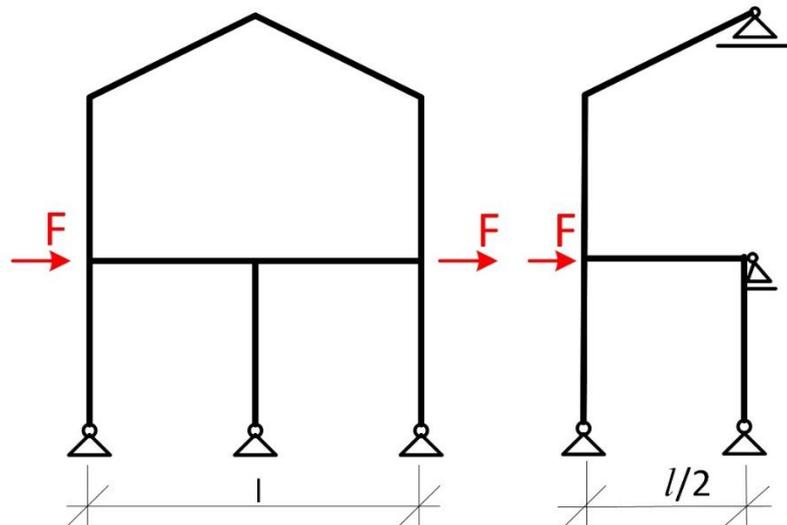
Symmetrische Belastung



System

Ersatzsystem

antimetrische Belastung



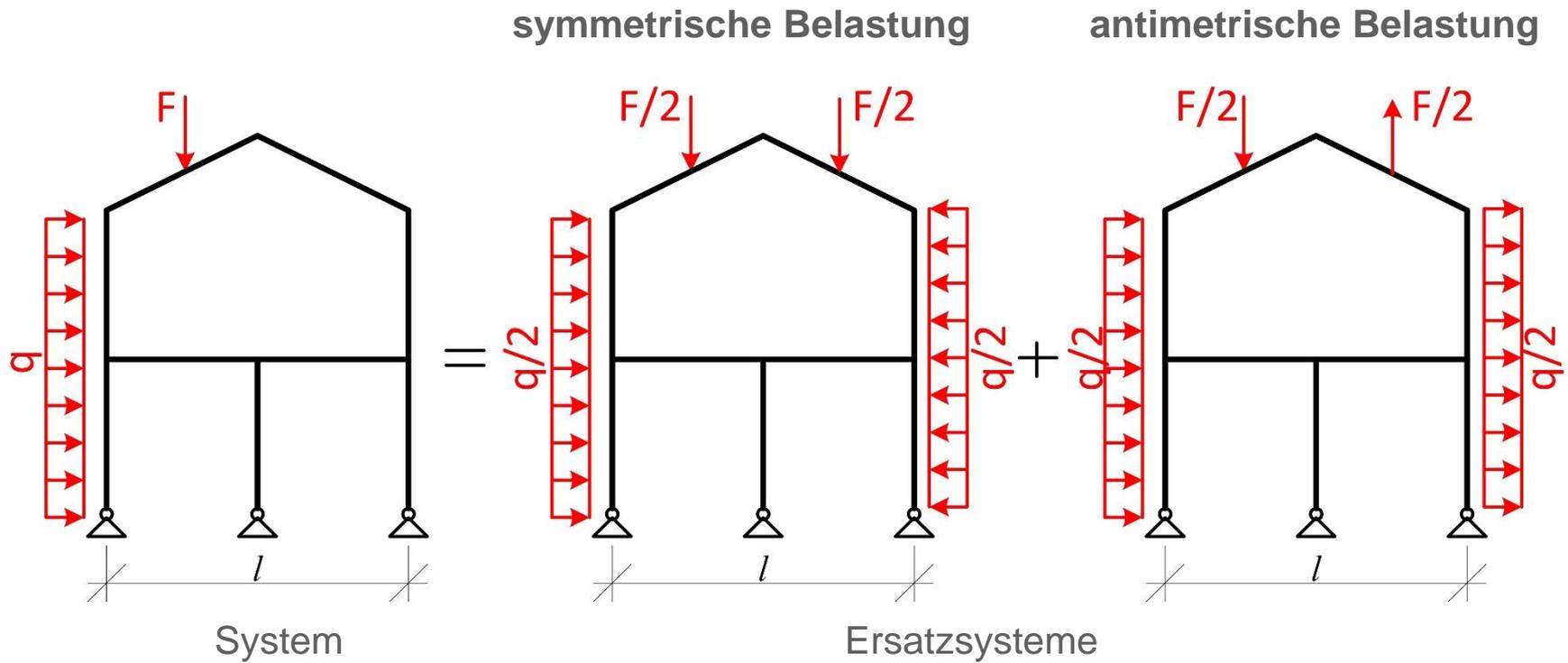
System

Ersatzsystem

Symmetrische Systeme

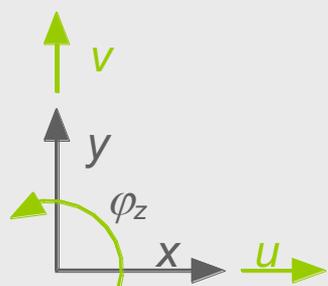
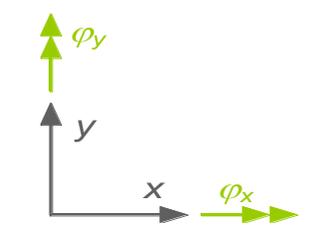
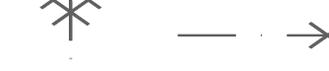
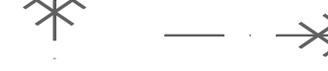
Bei großen symmetrischen Finite-Element-Modellen kann der Rechenaufwand durch Ausnutzung der Symmetrie deutlich verringert werden.

Beispiel: Symmetrischer Rahmen



Symmetrische Systeme

Symmetriebedingungen ebener symmetrischer Systeme

System	Belastung	
	symmetrisch	antimetrisch
 <p>Rahmen / Scheiben</p>	 $u=0$ $v=0$ $\varphi_z = 0$	 $v=0$ $u=0$ $\varphi_z = 0$
 <p>Trägerrost / Platte</p>	 $\varphi_y = 0$ $\varphi_x = 0$	 $w=0$ $w=0$ $\varphi_x = 0$ $\varphi_y = 0$

Symmetrische Systeme

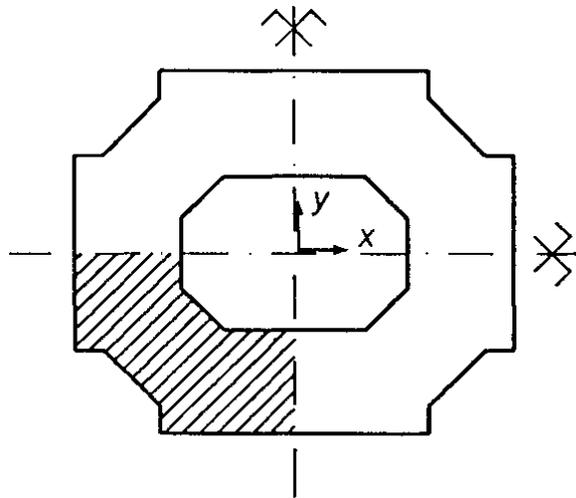
Spannungen und Schnittgrößen symmetrischer Systeme

System	Schnittgröße/ Spannungs- komponente	Belastung	
		symmetrisch	antimetrisch
Stabwerke	<ul style="list-style-type: none"> • Biegemomente • Normalkräfte • Torsionsmomente • Verschiebungen 	Symmetrisch	antimetrisch
	<ul style="list-style-type: none"> • Querkräfte 	antimetrisch	symmetrisch
Scheiben	<ul style="list-style-type: none"> • Normalspannungen • Verschiebungen 	symmetrisch	antimetrisch
	<ul style="list-style-type: none"> • Schubspannungen 	antimetrisch	symmetrisch
Platten	<ul style="list-style-type: none"> • Biegemomente • Querkräfte • Verschiebungen 	symmetrisch	antimetrisch
	<ul style="list-style-type: none"> • Torsionsmomente 	antimetrisch	symmetrisch

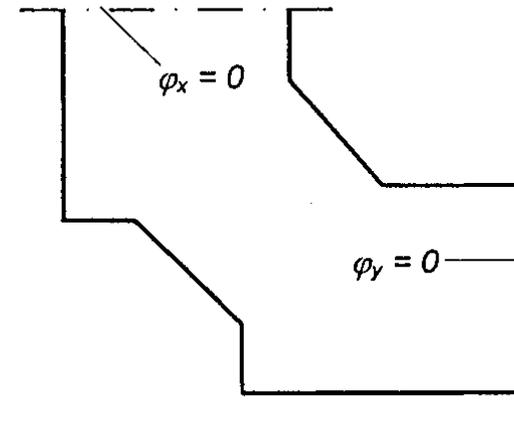
Symmetrische Systeme

Beispiel: Platte mit mehreren Symmetrieachsen

Partial system of one quarter of the plate



Deckenplatte

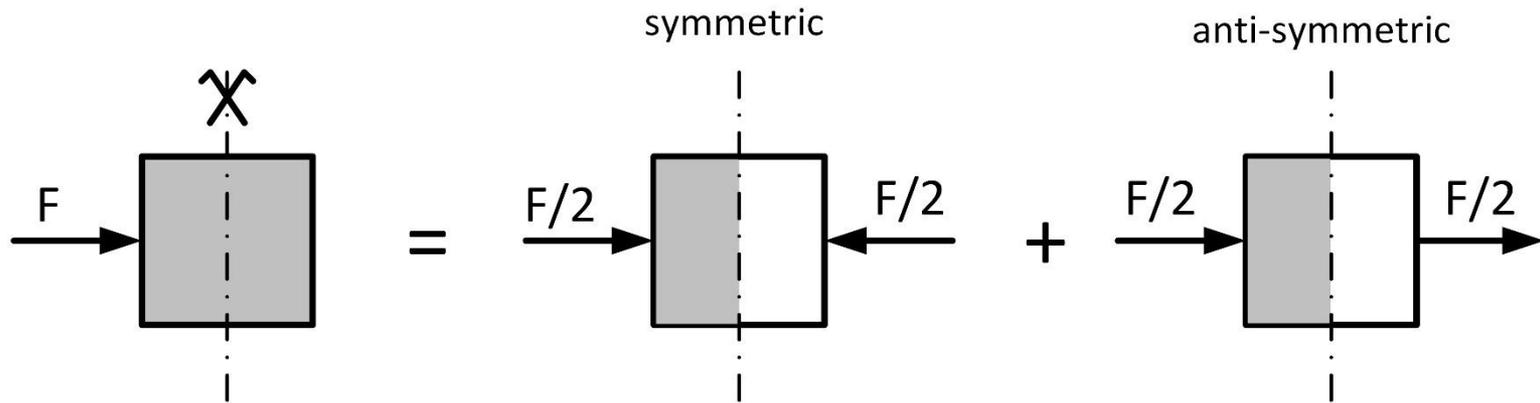


Ersatzsystem

Das System kann weiter zu einem Achtel des tatsächlichen Systems vereinfacht werden. In diesem Fall müssen geeignete Lagerbedingungen definiert werden.

Symmetrische Systeme

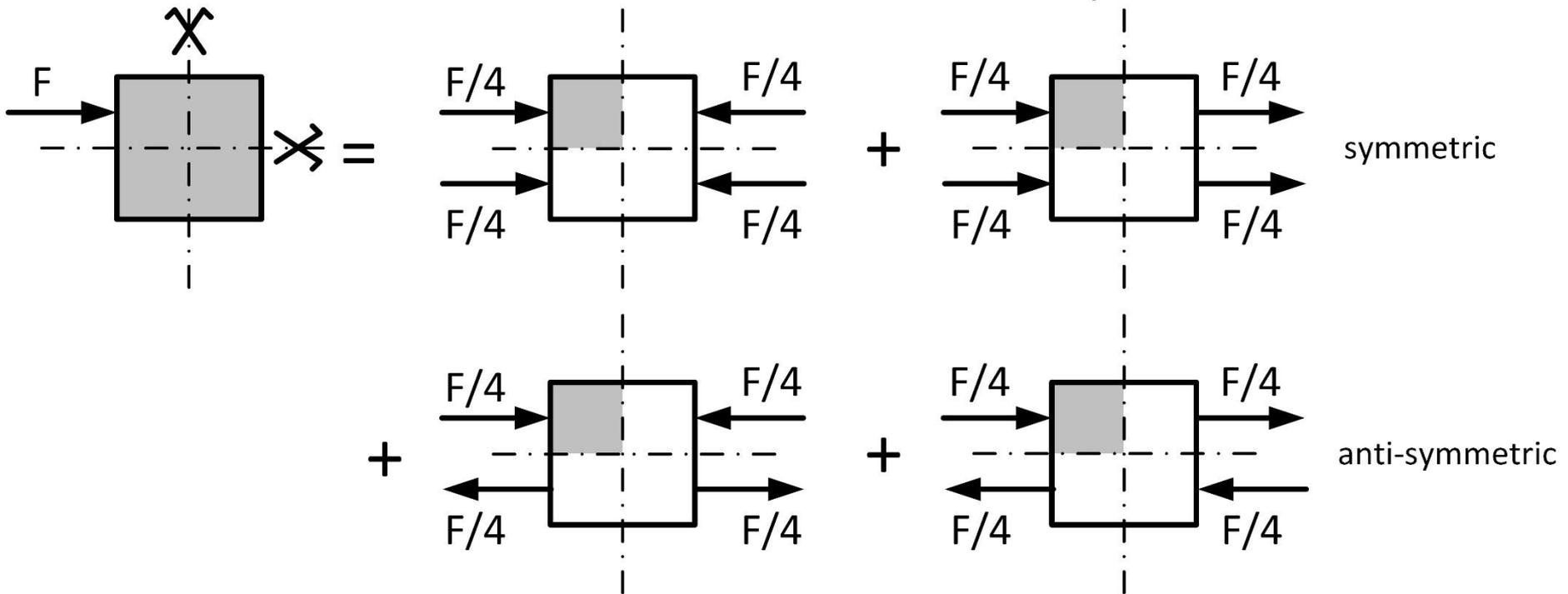
Beispiel: Überlagerung bei antimetrischen Lasten



System mit einer Symmetrieachse

Symmetrische Systeme

Beispiel: Überlagerung bei antimetrischen Lasten



System mit zwei Symmetrieachsen

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Fehlerquellen

- Fehlerart:**
- Fehlerhaftes Berechnungsmodell
 - Eingabefehler
 - Numerische Fehler
 - Programmfehler

Vom Programm feststellbare Fehler:

- inkonsistente Eingabedaten
- Kinematische Systeme
- Physikalisch sinnlose Material- und Querschnittskennwerte

Die meisten Fehler können vom Programm nicht festgestellt werden!

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Fehlerquellen

Eingabefehler

Ursachen:

- Unaufmerksamkeit
- Fehlerhaftes Verständnis des Programmhandbuchs
- Missverständliche Angaben im Programmhandbuch.

Abhilfe:

- Plausibilitätskontrolle der Lösungen
- Durchgängige sorgfältige Prüfung aller statisch relevanten Eingabedaten.

Häufigste Fehlerart!

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

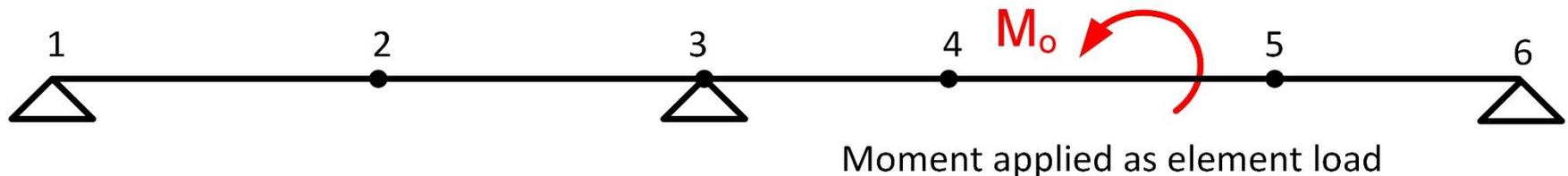
Fehlerquellen

Programmfehler

Fehler im Programmcode: Selten, kann aber nie ausgeschlossen werden!
Kritisch sind selten benutzte Programmfunktionalitäten

Beispiel

Ein Programm zur Berechnung von Durchlaufträgern wies einen Fehler auf, wenn ein eingprägtes Moment als Elementbelastung aufgebracht wurde. Die Vorgängerversion des Programms berechnete diesen Fall noch fehlerfrei !



Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Fehlerquellen

Numerische Fehler

Zahlen haben bei der Darstellung im Computer eine *endliche Genauigkeit*.

Beispiel: Taschenrechner

$$1000 + 1 - 1000 = 1 \quad \text{richtig}$$

$$10^{20} + 1 - 10^{20} = 0 \quad \text{falsch! D.h. der Taschenrechner hat eine Genauigkeit (Mantisse) von weniger als 20 Stellen}$$

$$10^9 + 1 - 10^9 = 1 \quad \text{richtig}$$

$$10^{10} + 1 - 10^{10} = 0 \quad \text{richtig, d.h. der Taschenrechner hat eine Genauigkeit von 9 Stellen}$$

Bei der Addition der Elementsteifigkeitsmatrizen zur Systemsteifigkeitsmatrix können alle signifikanten Stellen verloren gehen, wenn die Größenordnung der Terme der Matrizen zu unterschiedlich ist!

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Fehlerquellen

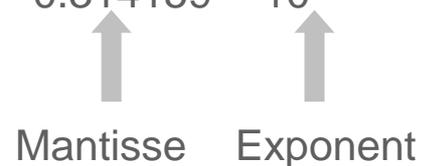
Numerische Fehler

Ursache: Begrenzte numerische Genauigkeit des Computers
Zahlenwerte werden im Computer durch Mantisse und Exponent dargestellt.
Beide Werte sind wegen der begrenzten Speicherkapazität des Computers begrenzt.

Beispiel: Darstellung der Zahl π bei einfacher Genauigkeit (6 Stellen der Mantisse):

Exakt: $\pi = 3.1415927\dots$

Bei einfacher Genauigkeit : $\pi = 0.314159 \cdot 10^1$



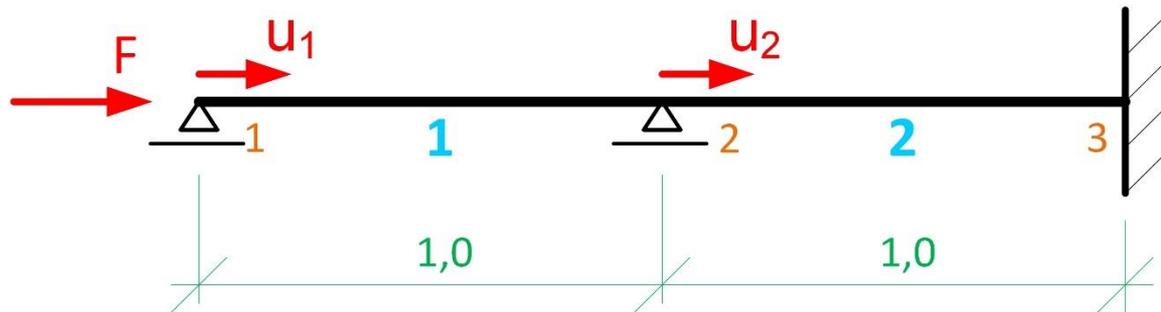
Alle nachfolgenden Stellen werden bei der Speicherung in einfacher Genauigkeit weggelassen.

Zahldarstellung

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Beispiel: Extreme Steifigkeitsunterschiede

Um eine starre Verbindung der Knotenpunkte 1 und 2 zu modellieren wird die Steifigkeit des Elements 1 extrem groß gewählt.



Elementsteifigkeiten:

Element 1: $EA = 10^{20}$

Element 2: $EA = 10^5$

Elementsteifigkeitsmatrizen

Fachwerkelement 1:

$$10^{20} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{20} & -10^{20} \\ -10^{20} & 10^{20} \end{bmatrix}$$

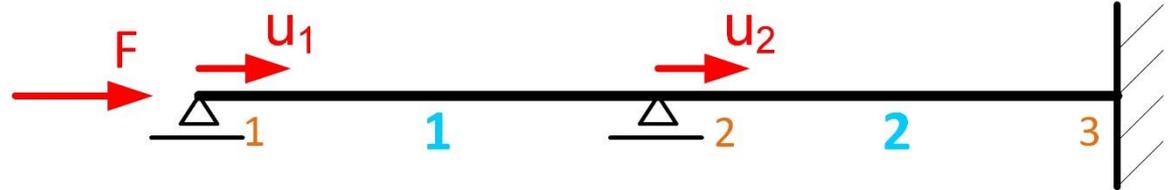
Fachwerkelement 2:

$$10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^5 & -10^5 \\ -10^5 & 10^5 \end{bmatrix}$$

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Beispiel: Extreme Steifigkeitsunterschiede

Systemsteifigkeitsmatrix



$$\begin{bmatrix} 10^{20} & -10^{20} & 0 \\ -10^{20} & 10^{20} & +10^5 & -10^5 \\ 0 & -10^5 & 10^5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit } u_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 10^{20} & -10^{20} \\ -10^{20} & 10^{20} & +10^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Systemsteifigkeitsmatrix bei einer numerischen Zahlendarstellung mit 15 Stellen Genauigkeit:

$$\begin{bmatrix} 10^{20} & -10^{20} \\ -10^{20} & 10^{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Singuläre Systemsteifigkeitsmatrix!

Mathematisch: Systemsteifigkeitsmatrix ist singulär

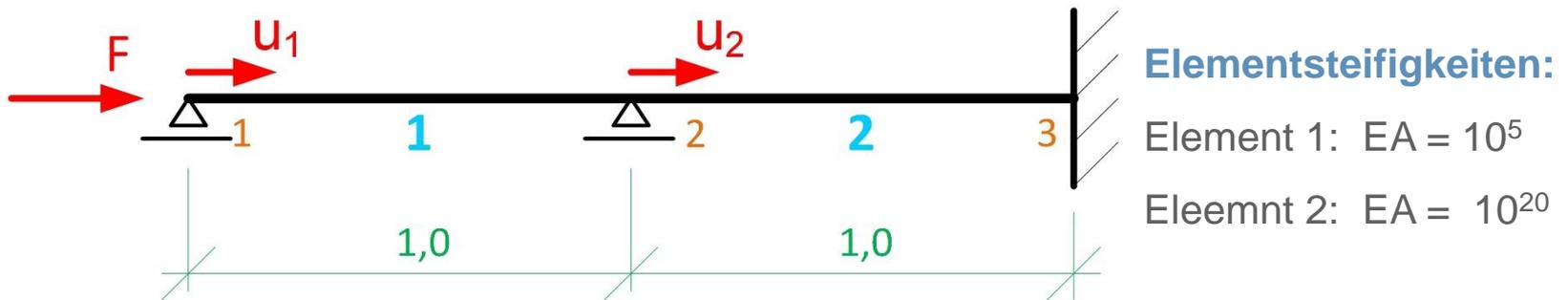
Statisch: Element 2 wird in der Berechnung vernachlässigt, d.h. das System ist kinematisch

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Beispiel: Extreme Steifigkeitsunterschiede

Dieser Effekt tritt nicht auf, wenn die Steifigkeit des extrem steifen Element auf die Diagonale addiert wird, d.h. eine Feder darstellt.

Beispiel: Die Steifigkeit des Elements 2 wird extrem hoch gewählt.



Elementsteifigkeitsmatrizen

Fachwerkelement 1:

$$10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^5 & -10^5 \\ -10^5 & 10^5 \end{bmatrix}$$

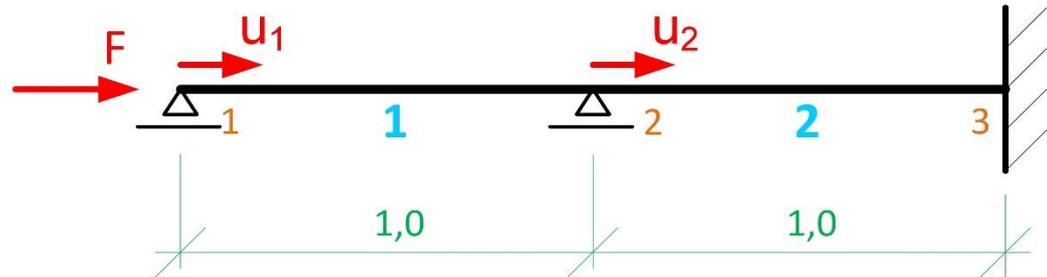
Fachwerkelement 2:

$$10^{20} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{20} & -10^{20} \\ -10^{20} & 10^{20} \end{bmatrix}$$

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Beispiel: Extreme Steifigkeitsunterschiede

Systemsteifigkeitsmatrix



$$\begin{bmatrix} 10^5 & -10^5 & 0 \\ -10^5 & 10^5 + 10^{20} & -10^{20} \\ 0 & -10^{20} & 10^{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

mit $u_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 10^5 & -10^5 \\ -10^5 & 10^5 + 10^{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Global stiffness matrix for the system if numerical values are represented with 15 digits accuracy:

$$\begin{bmatrix} 10^5 & -10^5 \\ -10^5 & 10^{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reguläre Systemsteifigkeitsmatrix!

Mathematisch: Systemsteifigkeitsmatrix ist regulär

Statisch: Element 2 wird berücksichtigt, d.h. das System ist nicht kinematisch

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Numerische Fehler

Beispiel: Extreme Steifigkeitsunterschiede

- Extrem große Steifigkeitsunterschiede zwischen benachbarten Elementen müssen vermieden werden.
- Am Rand des Finite-Element-Modells sind extrem große Steifigkeiten, z.B. von Federn in numerischer Hinsicht unproblematisch.

Ursachen

- extreme Steifigkeitsunterschiede benachbarter Elemente, z.B. $E \cdot A$, $E \cdot I$, $G \cdot I_T$
- extreme Unterschiede in der Elementlängen

Abhilfen

- Starre Kopplungen (wenn im Programm verfügbar)
- Begrenzung der Steifigkeitsunterschiede auf ein physikalisch sinnvolles Maß

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Kontrollen

- Jede Finite-Element-Berechnung erfordert eine Kontrolle auf ihre Richtigkeit.
- Ziel ist die Vermeidung von Fehlerquellen.
- Sehr wichtig ist eine kritische Überprüfung der Programmeingabe und -ausgabe.

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Kontrollen

Kontrolle einer Finite-Element-Berechnung

- **Plausibilitätskontrolle:** Grafische Darstellung des statischen Systems, seiner Verformungen und Schnittgrößen (z.B. Überprüfung auf fehlende Auflager, fehlerhafte Vorzeichen der Belastung u.s.w.)
- **Kontrolle der Summe aller Lasten:** einfache Berechnungen von Hand können Hinweise geben auf grobe Fehler bei der Lasteingabe.
- **Plausibilitätscheck der Querkraft- und Momentenlinien:** einfache Handrechnungen an vereinfachten Teilmodellen. Überprüfung der Gleichgewichts zwischen der insgesamt aufgebrachtten Belastung und den Auflagerkräften.
- **Abschließende sorgfältige Kontrolle aller relevanten Eingabedaten.**

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Kontrollen

Kontrollen bei singulärer Steifigkeitsmatrix

- Beendigung des Programms ohne Ausgabe von Ergebnissen -

- Überprüfung der Auflagerbedingungen
- Überprüfung auf Kinematiken an einzelnen Gelenken bzw. durch Kombination mehrerer Gelenke
- Überprüfung, ob freie Einzelknoten vorliegen
- Überprüfung, ob Biege-, Dehn- und Torsionssteifigkeiten eines Stabes gleich Null
- Überprüfung, ob extrem große Steifigkeitssprünge im Modell vorhanden sind

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Kontrollen

Kontrollen bei Zweifel an der Richtigkeit der Ergebnisse

Eine schrittweise Vereinfachung des Systems, bei der das verbleibende Teilsystem den angenommenen Fehler beinhaltet, ist eine gute Strategie zur Fehlersuche. Letztendlich sollte dies zu einem einfachen System führen, bei dem der Fehler offensichtlich ist.

Extensive Kontrolle

Wenn es nach einer sorgfältigen Überprüfung der Ergebnisse Zweifel an der Richtigkeit der Ergebnisse gibt, sollte eine neue unabhängige Berechnung, möglichst mit einem anderen Programm (und von einer anderen Person) durchgeführt werden.

Ende

Einführung
2 Stabtragwerke
Flächentragwerke
Modellbildung

Qualitätssicherung von FE-Berechnungen von Stabwerken

Programmiersprache	Zahlentyp	Stellenanzahl der Mantisse	Max. Exponent
Fortran	real*4	6	≈ 37
	real*8	15	≈ 307
C/C++ Java	float	6	≈ 37
	double	15	≈ 307

Darstellung von Fließkommazahlen im Computer



Auflager

Example: Influence of support conditions

Fall 2: Allseitig gelenkig gelagerter 3D-Balken

Momentengleichgewicht am mittleren Lager

