

---

# Finite Elemente in der Baustatik

Einführung

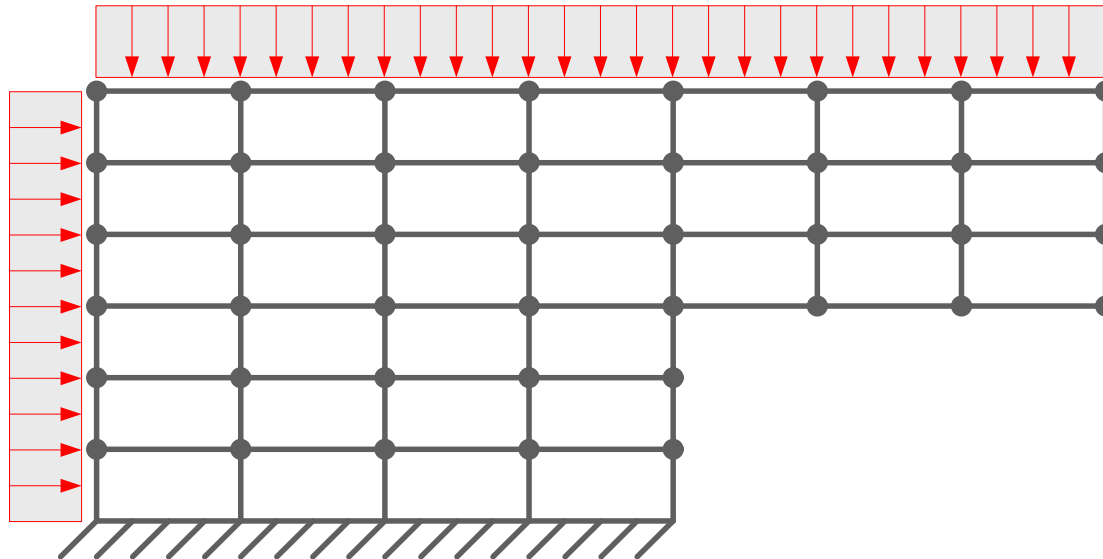
Stabtragwerke

**3** Flächentragwerke

Modellbildung

## Finite-Elemente-Methode für Flächentragwerke

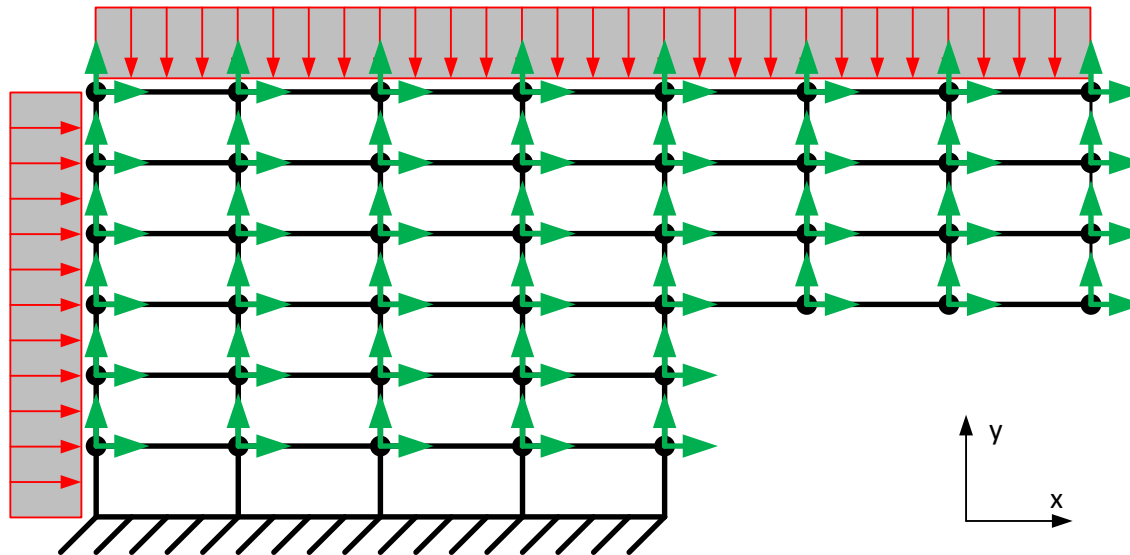
### Scheibe



- Diskretisierung einer Scheibe in Finite Elemente, d.h. Elemente endlicher Größe (z.B. Rechteckelemente mit 1 m Seitenlänge).
- Die Elemente sind an den Knotenpunkten miteinander verbunden.

# Finite-Elemente-Methode für Flächentragwerke

## Scheibe

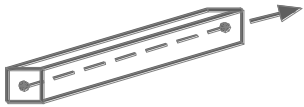


## Gleichungssystem

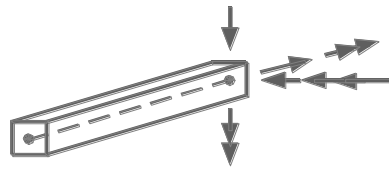
42 Knoten mit je 2 Freiheitsgraden  $\rightarrow$  84 Gleichungen

# Finite-Elemente-Methode für Flächentragwerke

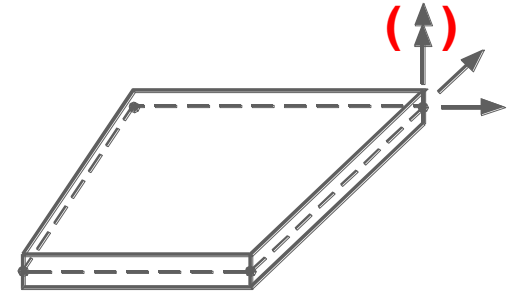
## Elementtypen und Freiheitsgrade



Truss element



Beam in bending



plane stress element

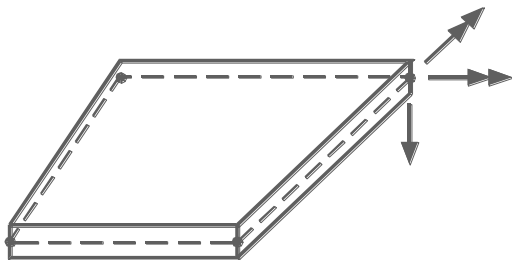
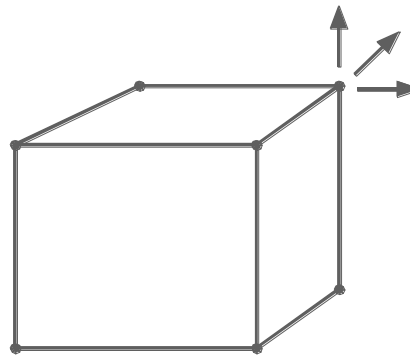
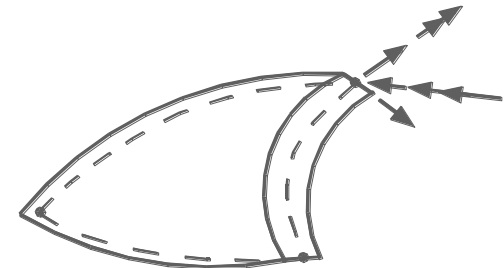


Plate element



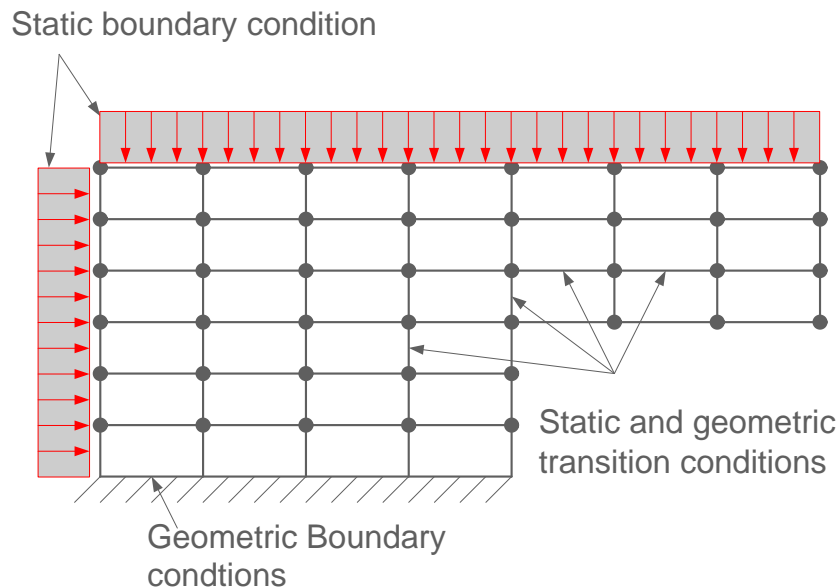
3D-continuum element



Shell element

# Finite-Elemente-Methode für Flächentragwerke

## Rand- und Übergangsbedingungen



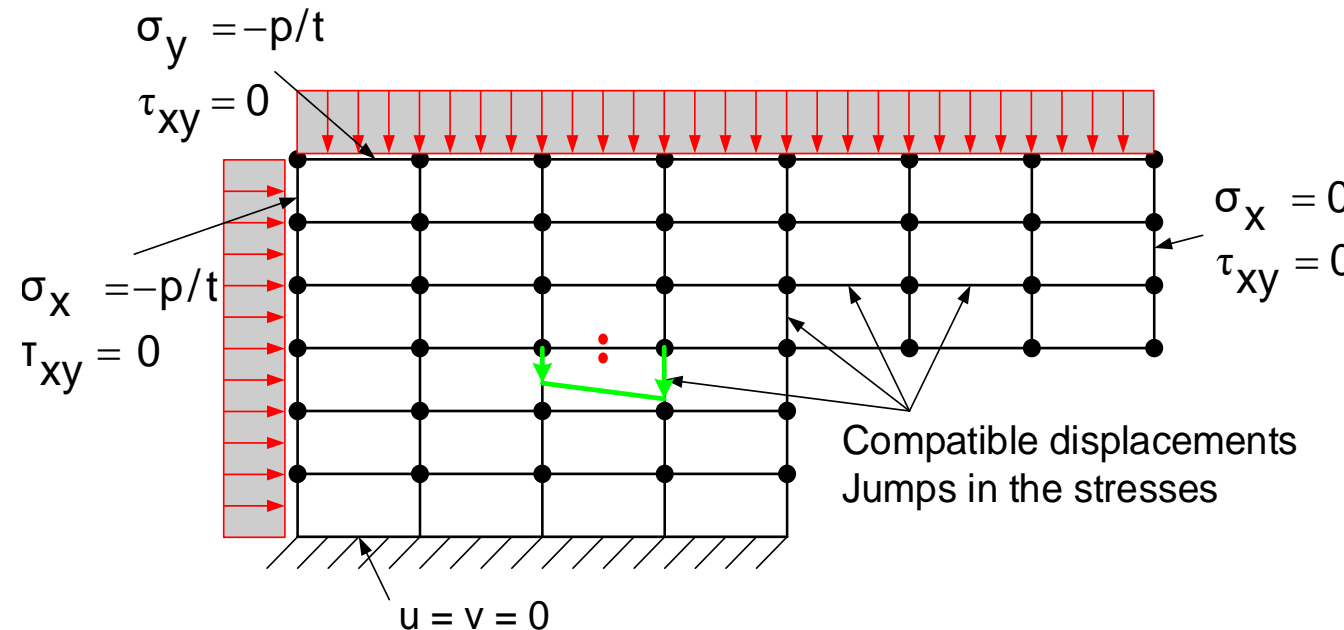
Kompatibilitätsbedingungen an den Rändern und den Grenzlinien benachbarter Elemente

Bedingung	FEM
1. Kompatibilität der Verschiebungen zwischen den Knotenpunkten	<b>erfüllt</b>
2. Kompatibilität der Spannungen an den Elementrändern (Gleichgewichtsbedingungen)	<b>nicht erfüllt</b>

# Finite-Elemente-Methode für Flächentragwerke

## Rand- und Übergangsbedingungen

### Beispiel: Bedingungen an der Grenzlinie zweier benachbarter Elemente



### Verschiebungen

An der gemeinsamen Grenzlinie haben beide Elemente dieselben Verschiebungen (sie verlaufen linear zwischen den Knotenpunkten)

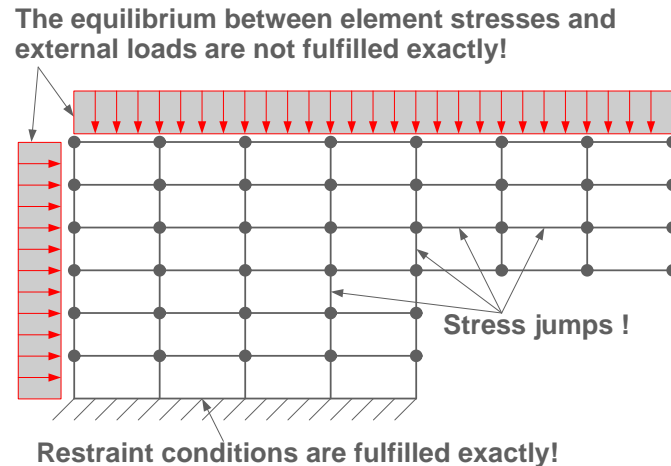
### Spannungen

Das obere und das untere Element haben an der Grenzlinie unterschiedliche Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ .

➔ Verletzung der Gleichgewichtsbedingungen !

## Finite-Elemente-Methode für Flächentragwerke

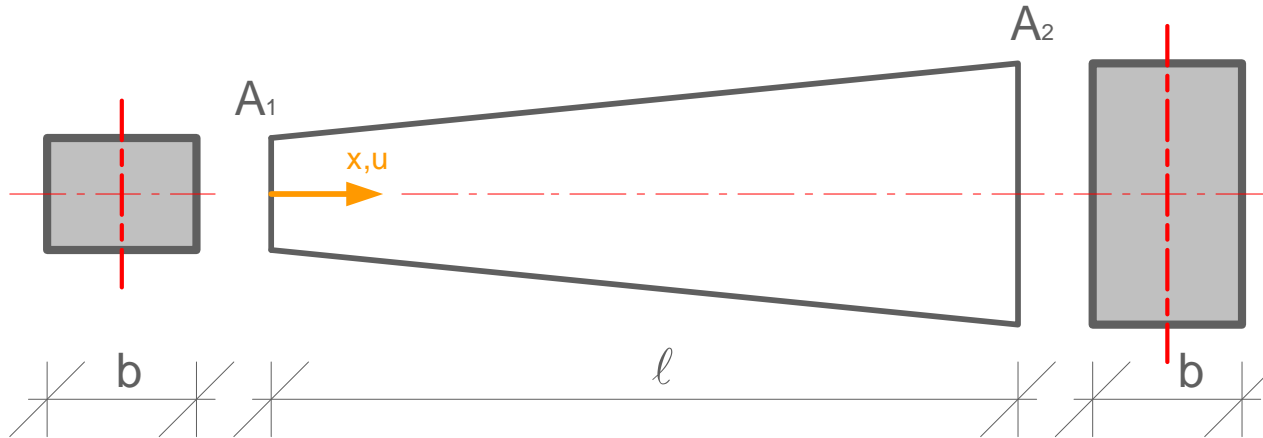
### Eigenschaften der Finite-Elemente-Methode mit Verschiebungsansätzen



- Verschiebungsgrößen stimmen an den Grenzen benachbarter Elemente überein.
- Die Gleichgewichtsbedingungen für die Kraftgrößen bzw. Spannungen werden an den Grenzlinien benachbarter Elemente **nicht** erfüllt. Es tritt ein in der exakten Lösung und damit in Wirklichkeit nicht vorhandener Spannungs- bzw. Schnittgrößenprung auf.
- Die Auflagerbedingungen werden an gelagerten Rändern erfüllt.
- An freien Rändern wird das Gleichgewicht zwischen Randlasten und Schnittgrößen **nicht** erfüllt.

## Eindimensionales Beispiel

### Fachwerkelement mit veränderlichem Querschnitt



Fachwerkelement

Querschnittsfläche:

$$A = A_1 + \frac{x}{l} \cdot (A_2 - A_1)$$

Knotenverschiebungen



Knotenkräfte



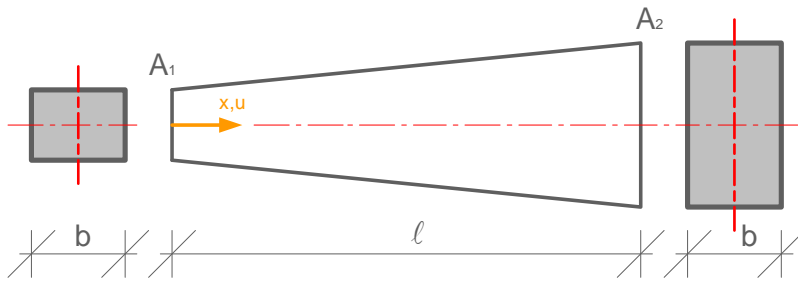
Normalkraft





## Beispiel: Analytische Lösung

Herleitung:



$$A = A_1 + \frac{x}{l} \cdot (A_2 - A_1)$$

Normalspannung  $\sigma_x$ :

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{N}{A_1 + x/l \cdot (A_2 - A_1)}$$

$$\sigma_x = \frac{N \cdot l}{A_1 \cdot l + x \cdot (A_2 - A_1)}$$

Dehnung  $\varepsilon_x$ :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N \cdot l}{E \cdot A_1 \cdot l + x \cdot E \cdot (A_2 - A_1)}$$

Verschiebung  $u$ :

$$u = \int_0^x \varepsilon_x dx + u_1 = \int_0^x \frac{N \cdot l}{E \cdot (A_1 \cdot l + x \cdot (A_2 - A_1))} dx + u_1$$

$$u = \frac{N \cdot l}{E (A_2 - A_1)} \cdot \ln \left( \frac{l \cdot A_1 + x (A_2 - A_1)}{l \cdot A_1} \right) + u_1$$

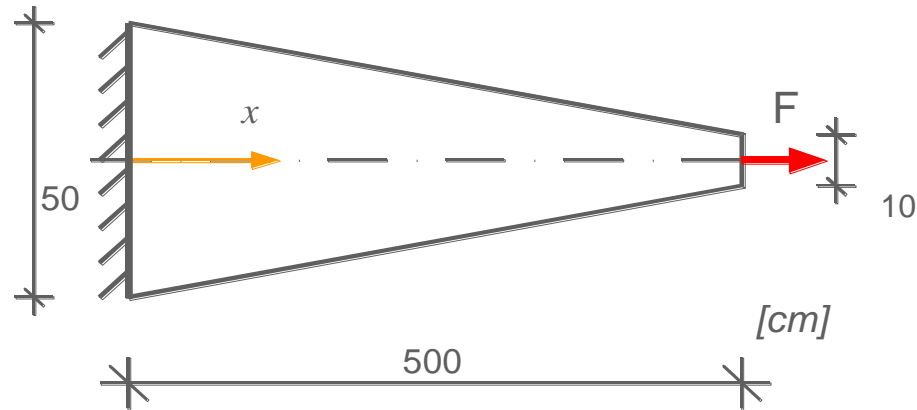
**Beispiel: Analytische Lösung****Zahlenbeispiel:****System**

$$A_1 = 500 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$E = 1000 \text{ kN/cm}^2$$

$$F = 100 \text{ kN}$$

**Verschiebungen:**

$$u = \frac{N \cdot l}{E (A_2 - A_1)} \cdot \ln \left( \frac{l \cdot A_1 + x (A_2 - A_1)}{l \cdot A_1} \right) + u_1 = \frac{100 \cdot 500}{1000 \cdot (100 - 500)} \cdot \ln \left( \frac{500 \cdot 500 + x \cdot (100 - 500)}{500 \cdot 500} \right) + 0$$

$$u = -0.125 \cdot \ln(1 - 0.0016 \cdot x) \quad \text{mit } u \text{ [cm], } x \text{ [cm]}$$

**Spannungen:**

$$\sigma_x = \frac{N \cdot l}{A_1 \cdot l + x \cdot (A_2 - A_1)} = \frac{100 \cdot 500}{500 \cdot 500 + x \cdot (100 - 500)}$$

$$\sigma_x = \frac{100}{500 - 0.8 \cdot x} \quad \text{mit } x \text{ [cm] und } \sigma_x \text{ [kN/cm}^2\text{]}$$

**Beispiel: Analytische Lösung****Zahlenbeispiel:**

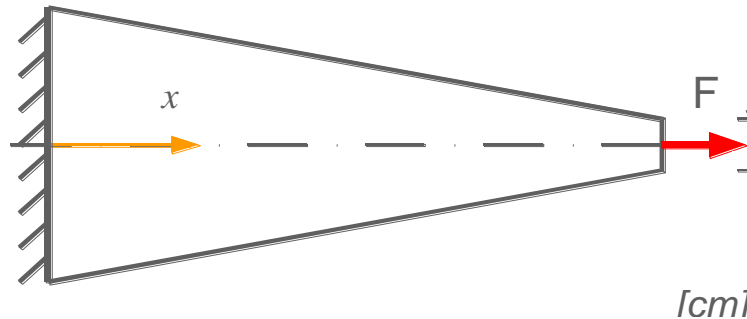
System

$$A_1 = 500 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$E = 1000 \text{ kN/cm}^2$$

$$F = 100 \text{ kN}$$



Verschiebungen:

$$u = -0.125 \cdot \ln(1 - 0.0016 \cdot x)$$

Spannungen:

$$\sigma_x = \frac{100}{500 - 0.8 \cdot x}$$

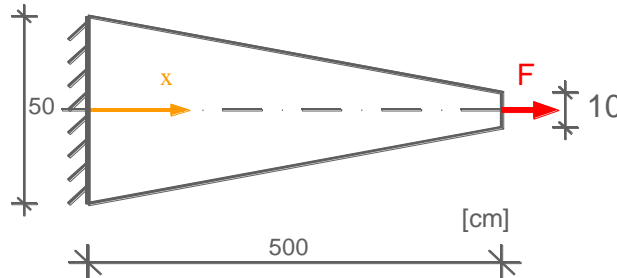
mit  $x$  [cm],  $u$  [cm]  
und  $\sigma_x$  [kN/cm<sup>2</sup>]

$x$ [cm]	0	100	200	250	300	400	500
$u$ [cm]	0	0.022	0.048	0.064	0.082	0.128	0.201
$\sigma_x$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	0.200	0.238	0.294	0.333	0.385	0.556	1.000

## Beispiel: Analytische Lösung

### Zahlenbeispiel:

System



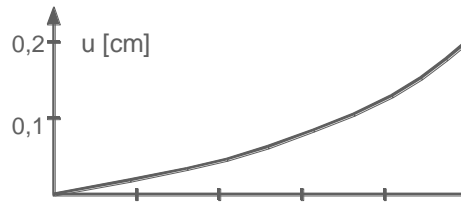
$$A_1 = 500 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$E = 1000 \text{ kN/cm}^2$$

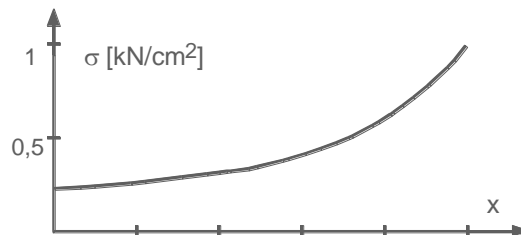
$$F = 100 \text{ kN}$$

Verschiebungen



$$u = -0.125 \cdot \ln(1 - 0.0016 \cdot x)$$

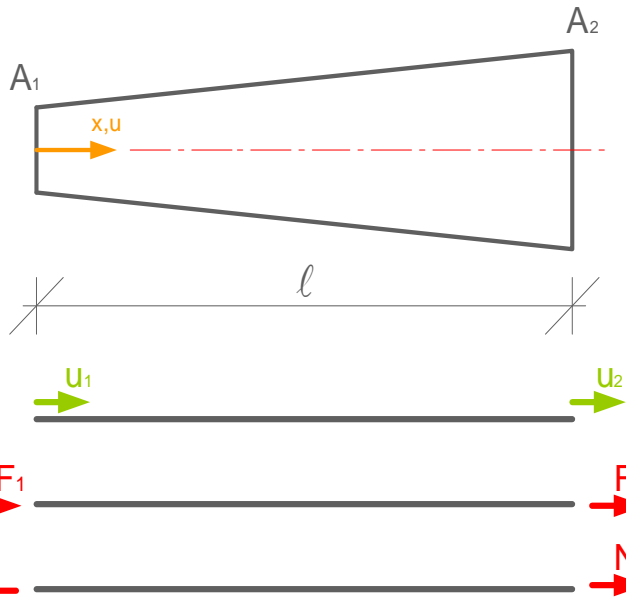
Spannungen



$$\sigma_x = \frac{100}{500 - 0.8 \cdot x}$$

## Beispiel: Analytische Lösung

Steifigkeitsmatrix:



Verschiebungen: 
$$u = \frac{N \cdot l}{E (A_2 - A_1)} \cdot \ln \left( \frac{l \cdot A_1 + x (A_2 - A_1)}{l \cdot A_1} \right) + u_1$$

Verschiebung  $u_2$  am Ende des Stabes  $x = l$ :

$$u_2 = u_{(x=l)} = \frac{N \cdot l}{E (A_2 - A_1)} \cdot \ln \left( \frac{A_2}{A_1} \right) + u_1 \quad \rightarrow$$

$$N = \frac{E (A_2 - A_1)}{l \cdot \ln (A_2 / A_1)} \cdot (u_2 - u_1)$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$F_1 = -N = -\frac{E (A_2 - A_1)}{l \cdot \ln (A_2 / A_1)} \cdot (u_2 - u_1)$$

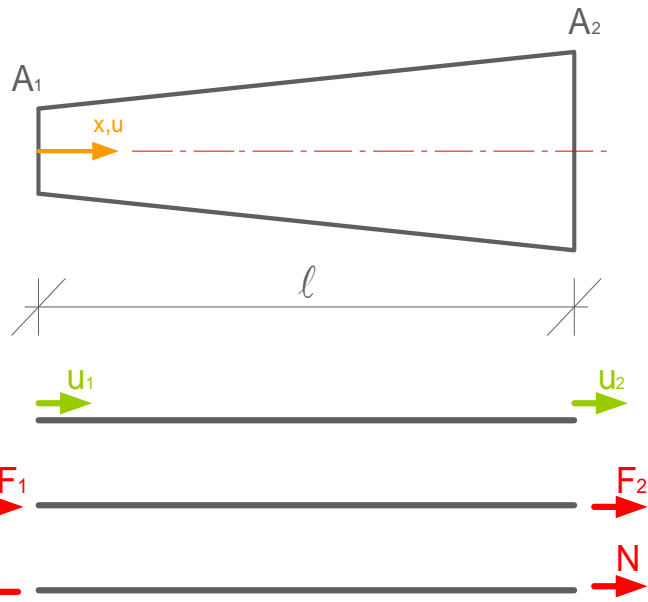
$$F_2 = N = \frac{E (A_2 - A_1)}{l \cdot \ln (A_2 / A_1)} \cdot (u_2 - u_1)$$

Matrizen-  
schreibweise:

$$\frac{E (A_2 - A_1)}{l \cdot \ln (A_2 / A_1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

## Beispiel: Analytische Lösung

Stiffness matrix:



Verschiebungen im Stabelement

$$u = \frac{\ln\left(\frac{\ell \cdot A_1 + x(A_2 - A_1)}{\ell \cdot A_1}\right)}{\ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)} (u_2 - u_1) + u_1$$

Spannungen im Stabelement

$$\sigma_x = \frac{E \cdot (A_2 - A_1)}{(\ell \cdot A_1 + x(A_2 - A_1)) \cdot \ln(A_2 / A_1)} \cdot (u_2 - u_1)$$

Steifigkeitsmatrix

$$\frac{E \cdot (A_2 - A_1)}{\ell \cdot \ln(A_2 / A_1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

**Beispiel: FE-Lösung – lineare Ansatzfunktion****Steifigkeitsmatrix:****Verschiebungen:**

Annahme eines linearen Verlaufs zwischen den Knoten.

$$u = u_1 + \frac{x}{l} \cdot (u_2 - u_1)$$

**Dehnungen:**

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{1}{l} \cdot (u_2 - u_1)$$

**Spannungen:**

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = \frac{E}{l} \cdot (u_2 - u_1)$$

Die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen (z.B.  $F_1 = \sigma_x \cdot A_1$ ,  $F_2 = \sigma_x \cdot A_2$ ) ist hier nicht möglich.

Statt dessen wird das Arbeitsprinzip (Prinzip der virtuellen Verschiebungen) erfüllt.

## Beispiel: FE-Lösung – lineare Ansatzfunktion

### Steifigkeitsmatrix:



### Virtuelle Verschiebungen:

linearer Verlauf wie bei den realen Verschiebungen

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \frac{x}{\ell} \cdot (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$$

### Virtuelle Dehnungen:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{1}{\ell} \cdot (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$$

### Prinzip der virtuellen Verschiebungen:

$$\bar{W}_i = \bar{W}_a$$

$$\bar{W}_i = \int_0^{\ell} A_x \cdot \sigma_x \cdot \bar{\varepsilon}_x dx$$

$$= \int_0^{\ell} \left( A_1 + \frac{x}{\ell} (A_2 - A_1) \right) \cdot \frac{E}{\ell} \cdot (u_2 - u_1) \cdot \frac{1}{\ell} \cdot (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) dx$$

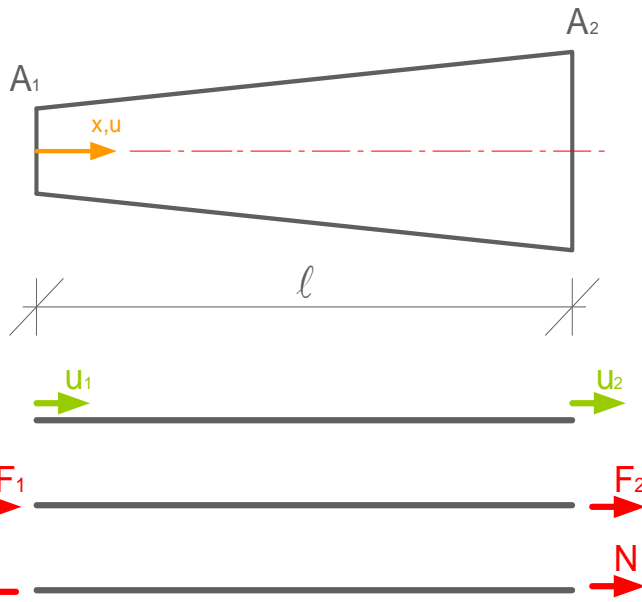
$$= \left( A_1 \cdot x + \frac{x^2}{2 \cdot \ell} (A_2 - A_1) \right) \cdot \frac{E}{\ell} \cdot (u_2 - u_1) \cdot \frac{1}{\ell} \cdot (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \Big|_0^{\ell} = \frac{A_1 + A_2}{2} \cdot \frac{E}{\ell} \cdot (u_2 - u_1) \cdot (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$$

$W_i$  = interne virtuelle Arbeit  
 $W_a$  = externe virtuelle Arbeit



## Beispiel: FE-Lösung – lineare Ansatzfunktion

Steifigkeitsmatrix:



Prinzip der virtuellen Verschiebungen:  $\bar{W}_i = \bar{W}_a$

$$\bar{W}_i = \frac{A_1 + A_2}{2} \cdot \frac{E}{l} \cdot (u_2 - u_1) \cdot (-\bar{u}_1 + \bar{u}_2)$$

$$\bar{W}_a = F_1 \cdot \bar{u}_1 + F_2 \cdot \bar{u}_2$$

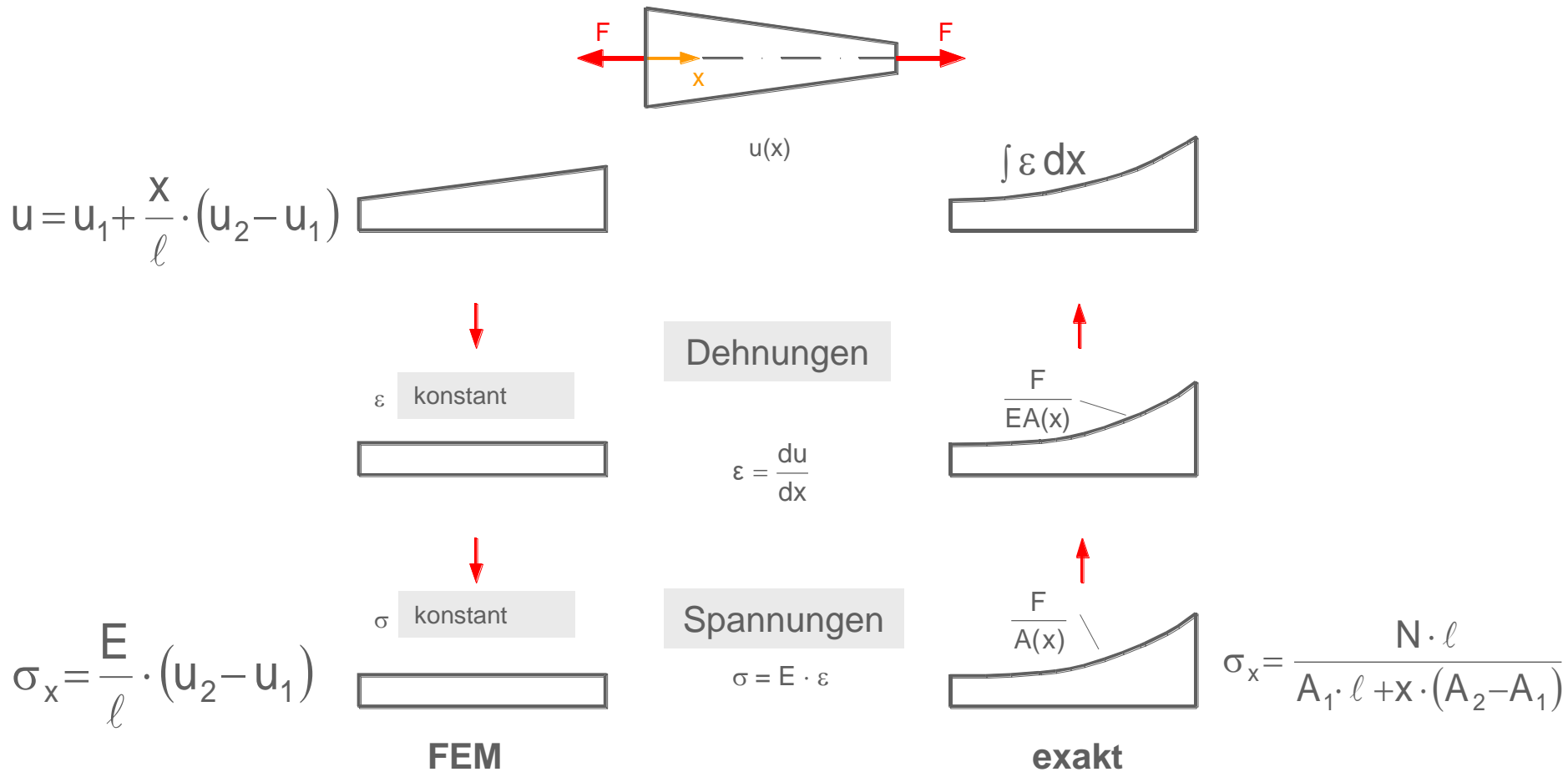
$$\text{a) } \bar{u}_1 = 1; \quad \bar{u}_2 = 0 \Rightarrow \frac{E}{l} \cdot \frac{A_1 + A_2}{2} \cdot (u_1 - u_2) = F_1$$

$$\text{b) } \bar{u}_1 = 0; \quad \bar{u}_2 = 1 \Rightarrow \frac{E}{l} \cdot \frac{A_1 + A_2}{2} \cdot (-u_1 + u_2) = F_2$$

Steifigkeitsmatrix:

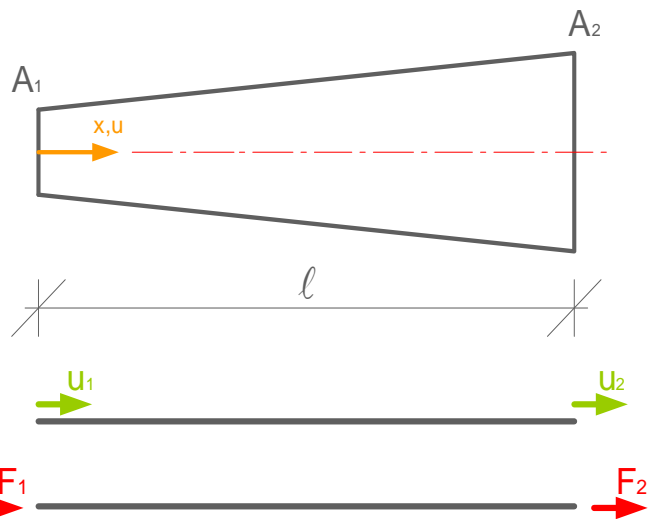
$$\frac{E \cdot (A_1 + A_2)}{2 \cdot l} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

## Beispiel: FE-Näherung und exakte Lösung



## Beispiel: FE-Näherung und exakte Lösung

Steifigkeitsmatrix:



Exakte Lösung

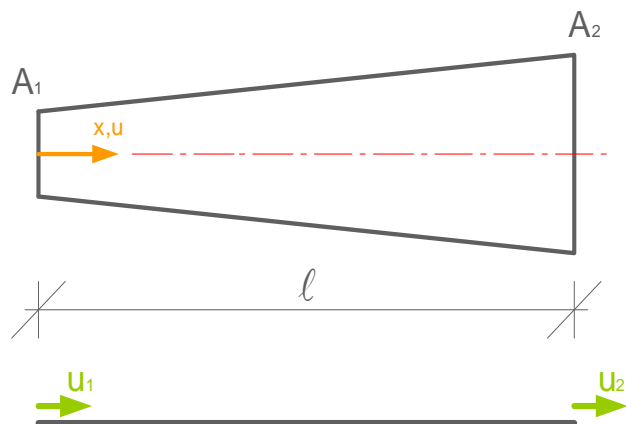
$$\frac{E \cdot (A_2 - A_1)}{l \cdot \ln(A_2 / A_1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

FEM

$$\frac{E \cdot (A_1 + A_2)}{2 \cdot l} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

## Beispiel: FE-Lösung – lineare Ansatzfunktion

### Zahlenbeispiel: Diskretisierung des Stabes in zwei Elemente



### Steifigkeitsbeziehung:

$$\frac{E}{l} \cdot \frac{(A_1 + A_2)}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit } u_1 = 0$$

$$\text{Verschiebungen: } \frac{E}{l} \cdot \frac{(A_1 + A_2)}{2} \cdot u_2 = F$$

$$\frac{1000}{500} \cdot \frac{500 + 100}{2} \cdot u_2 = 100$$

$$u_2 = \frac{100}{600} = 0.167 \text{ [cm]}$$

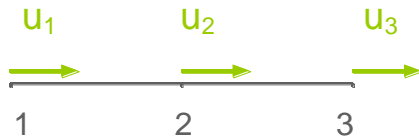
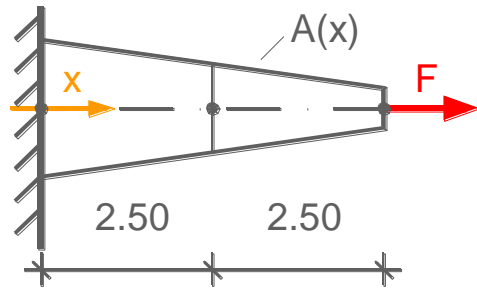
### Elementspannungen:

$$\sigma_x = \frac{E}{l} \cdot (-u_1 + u_2) = \frac{1000}{500} \cdot (0 + 0.167) = 0.333 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= 500 \text{ cm}^2 & A_2 &= 100 \text{ cm}^2 \\ E &= 1000 \text{ kN/cm}^2 & F &= 100 \text{ kN} \end{aligned}$$

## Beispiel: FE-Lösung – lineare Ansatzfunktion

### Zahlenbeispiel: Diskretisierung des Stabes in zwei Elemente



#### Elementsteifigkeitsmatrizen

Element 1:  $\frac{E}{l} \cdot \frac{(A_1 + A_2)}{2} \cdot u_2 = F_2^{(1)}$       $\frac{1000}{250} \cdot \frac{500 + 300}{2} \cdot u_2 = F_2^{(1)}$   
 $1600 \cdot u_2 = F_2^{(1)}$

Element 2:  $\frac{E}{l} \cdot \frac{(A_2 + A_3)}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{bmatrix}$

$\frac{1000}{250} \cdot \frac{300 + 100}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{bmatrix}$

$800 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{bmatrix}$

Querschnittsfläche bei  $x = 250$  [cm]:

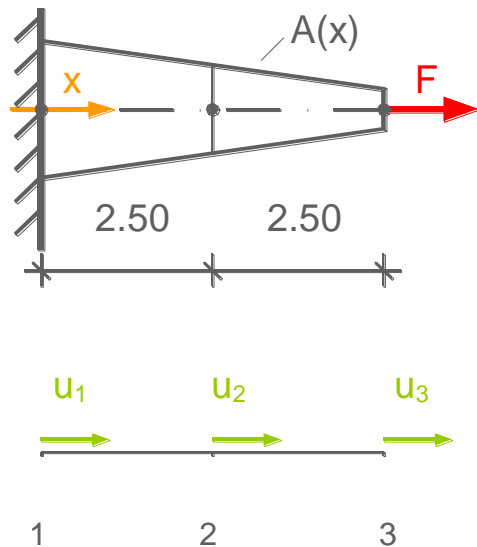
$$A = A_1 + \frac{x}{l} \cdot (A_2 - A_1)$$

$$= 500 + \frac{250}{500} \cdot (100 - 500) = 300 \text{ [cm}^2\text{]}$$

**Steifigkeitsmatrix**

## Beispiel: FE-Lösung – lineare Ansatzfunktion

### Zahlenbeispiel: Diskretisierung des Stabes in zwei Elemente



Steifigkeitsmatrix

$$1600 \cdot u_2 = F_2^{(1)}$$

Element 1:

$$800 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

Element 2:

Globale

Steifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1600 + 800 & -800 \\ -800 & 800 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$u_2 = 0.063 \text{ [cm]}$$

$$u_3 = 0.188 \text{ [cm]}$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{l} \cdot (u_2 - u_1) \quad \sigma_2 = \frac{E}{l} \cdot (u_3 - u_2)$$

Spannungen in den Elementen 1 und 2:

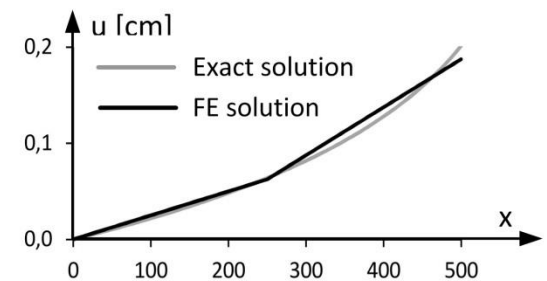
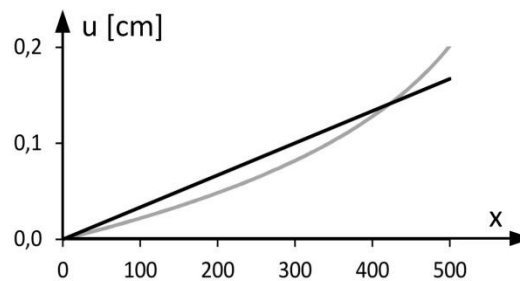
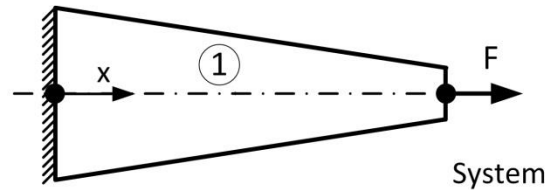
$$\sigma_1 = 0.250 \text{ [kN/cm}^2\text{]} \quad \sigma_2 = 0.500 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$$

## Beispiel: FE-Lösung und exakte Lösung

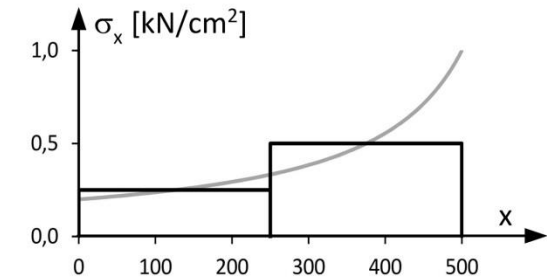
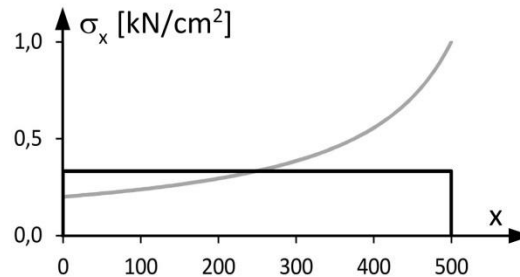
### Zahlenbeispiel:

#### FEM-Näherung

mit einem und mit zwei Elementen mit linearer Ansatzfunktion



Displacements



Element stresses

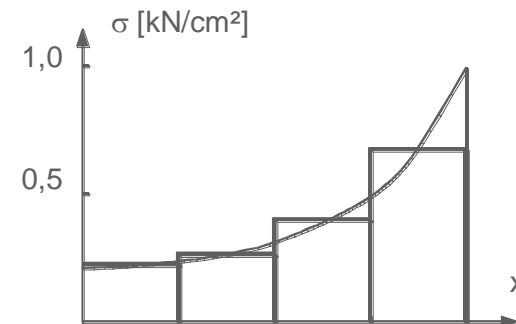
a) 1 element

b) 2 elements

## Beispiel: FE-Lösung und exakte Lösung

### Verbesserung der Genauigkeit

- Vergrößerung der Anzahl der Elemente
- Erhöhung des Polynomgrades der Ansatzfunktion



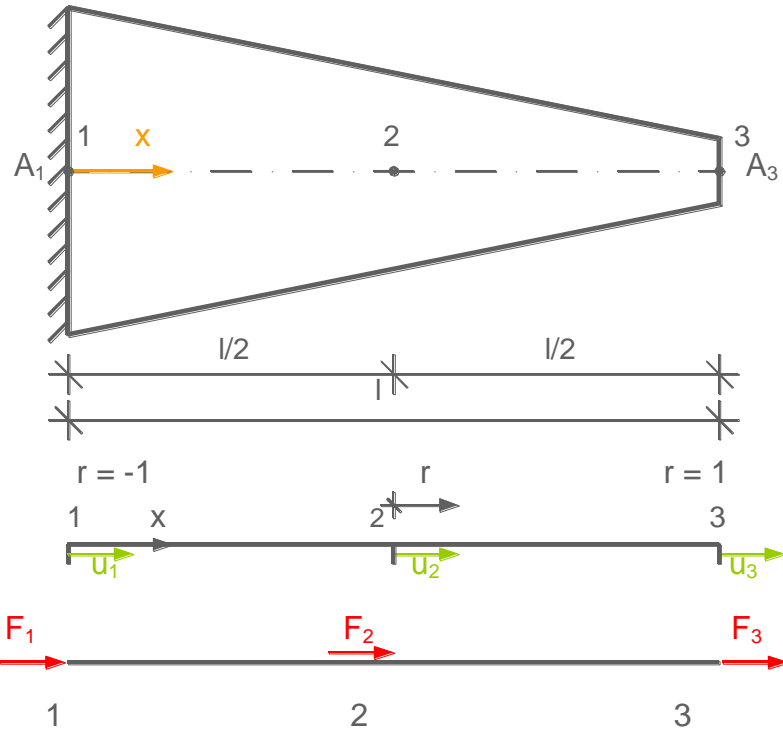
Lineare Ansatzfunktion  
der Verschiebung



Ansatzfunktionen mit Polynomen zweiten,  
dritten, vierten Grades...u.s.w.



## Beispiel: FE-Lösung – quadratische Ansatzfunktion



Koordinate  $r$   $r = \frac{2 \cdot x}{l} - 1$

Querschnitt  $A = \frac{1}{2}(1-r)A_1 + \frac{1}{2}(1+r)A_3$

Verschiebung 
$$u = \left[ \frac{1}{2}(1-r) - \frac{1}{2}(1-r^2) \right] \cdot u_1 + (1-r^2) \cdot u_2 + \left[ \frac{1}{2}(1+r) - \frac{1}{2}(1-r^2) \right] \cdot u_3$$

Dehnung  $\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{dr}{dx}$

$$\varepsilon = \frac{1}{l}(-1 + 2r) \cdot u_1 - \frac{4}{l}r \cdot u_2 + \frac{1}{l}(1 + 2r) \cdot u_3$$

## Beispiel: FE-Lösung – quadratische Ansatzfunktion

Dehnungen

$$\varepsilon = \frac{1}{l}(-1 + 2r) \cdot u_1 - \frac{4}{l}r \cdot u_2 + \frac{1}{l}(1 + 2r) \cdot u_3$$

Spannungen  $\sigma = E \cdot \varepsilon$

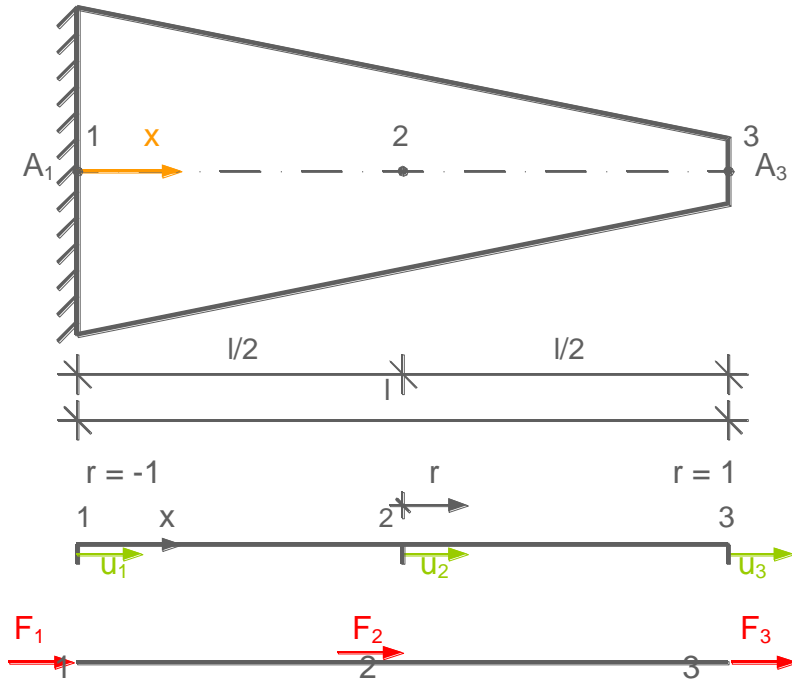
$$\sigma = \frac{E}{l}(-1 + 2r) \cdot u_1 - \frac{4E}{l}r \cdot u_2 + \frac{E}{l}(1 + 2r) \cdot u_3$$

Spannungen an den Knotenpunkten

$$\sigma_1 = E \cdot (-3 \cdot u_1 + 4 \cdot u_2 - u_3) / l$$

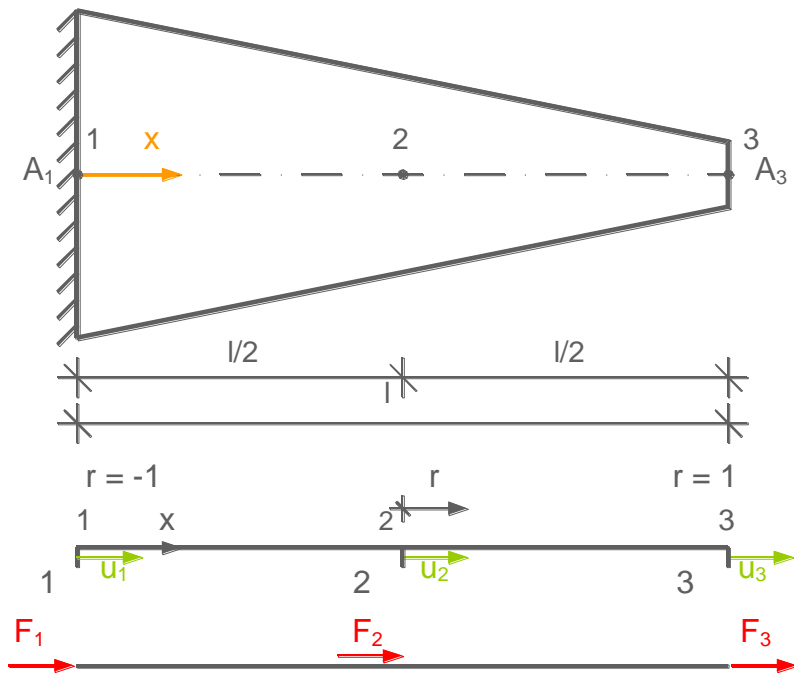
$$\sigma_2 = E \cdot (-u_1 + u_3) / l$$

$$\sigma_3 = E \cdot (u_1 - 4 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3) / l$$



## Beispiel: FE-Lösung – quadratische Ansatzfunktion

### Prinzip der virtuellen Verschiebungen



### Virtuelle Verschiebungen

$$\bar{u} = \left[ \frac{1}{2}(1-r) - \frac{1}{2}(1-r^2) \right] \cdot \bar{u}_1 + (1-r^2) \cdot \bar{u}_2 + \left[ \frac{1}{2}(1+r) - \frac{1}{2}(1-r^2) \right] \cdot \bar{u}_3$$

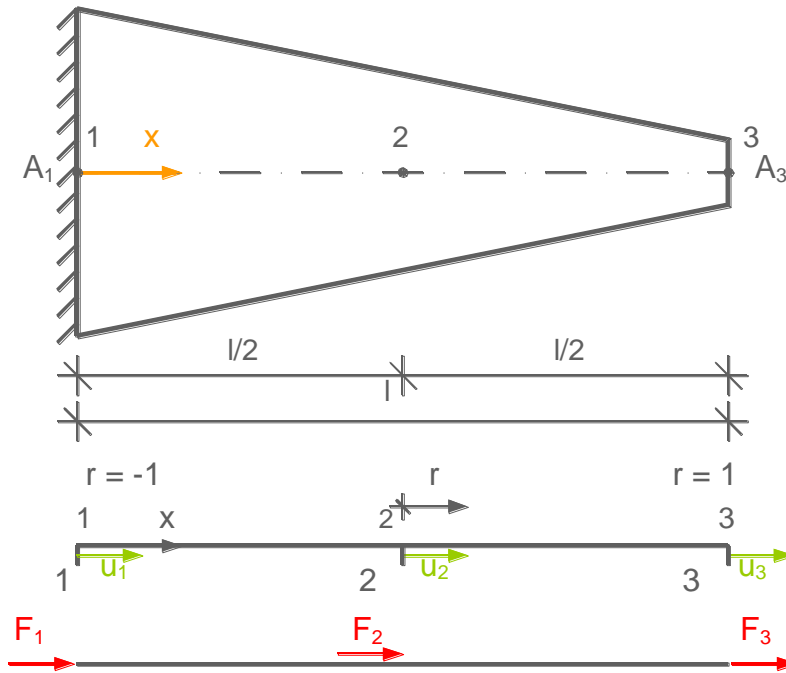
### Virtuelle Dehnungen

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{l}(-1+2r) \cdot \bar{u}_1 - \frac{4}{l}r \cdot \bar{u}_2 + \frac{1}{l}(1+2r) \cdot \bar{u}_3$$

## Beispiel: FE-Lösung – quadratische Ansatzfunktion

### Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\overline{W}_i = \overline{W}_a$$



$$\int_0^l \overline{\varepsilon} \cdot \sigma \cdot A \, dx = F_1 \cdot \overline{u}_1 + F_2 \cdot \overline{u}_2 + F_3 \cdot \overline{u}_3$$

$$\int_0^l \left[ \frac{1}{l} (-1 + 2r) \cdot \overline{u}_1 - \frac{4}{l} r \cdot \overline{u}_2 + \frac{1}{l} (1 + 2r) \cdot \overline{u}_3 \right]$$

$$\cdot \left[ \frac{E}{l} (-1 + 2r) \cdot u_1 - \frac{4E}{l} r \cdot u_2 + \frac{E}{l} (1 + 2r) \cdot u_3 \right]$$

$$\cdot \left( A_1 + \frac{x}{l} (A_3 - A_1) \right) dx$$

$$= F_1 \cdot \overline{u}_1 + F_2 \cdot \overline{u}_2 + F_3 \cdot \overline{u}_3$$

## Beispiel: FE-Lösung – quadratische Ansatzfunktion

Durchführung der Integration

$$\frac{E A_1}{l} \cdot \left[ \left[ \left( \frac{7}{3} + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot u_1 + \left( -\frac{8}{3} - \frac{2}{3} \alpha \right) \cdot u_2 + \left( \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{6} \right) \cdot u_3 \right] \cdot \bar{u}_1 \right.$$

$$+ \left[ \left( -\frac{8}{3} - \frac{2}{3} \alpha \right) \cdot u_1 + \left( \frac{16}{3} + \frac{8}{3} \alpha \right) \cdot u_2 + \left( -\frac{8}{3} - 2\alpha \right) \cdot u_3 \right] \cdot \bar{u}_2 \right.$$

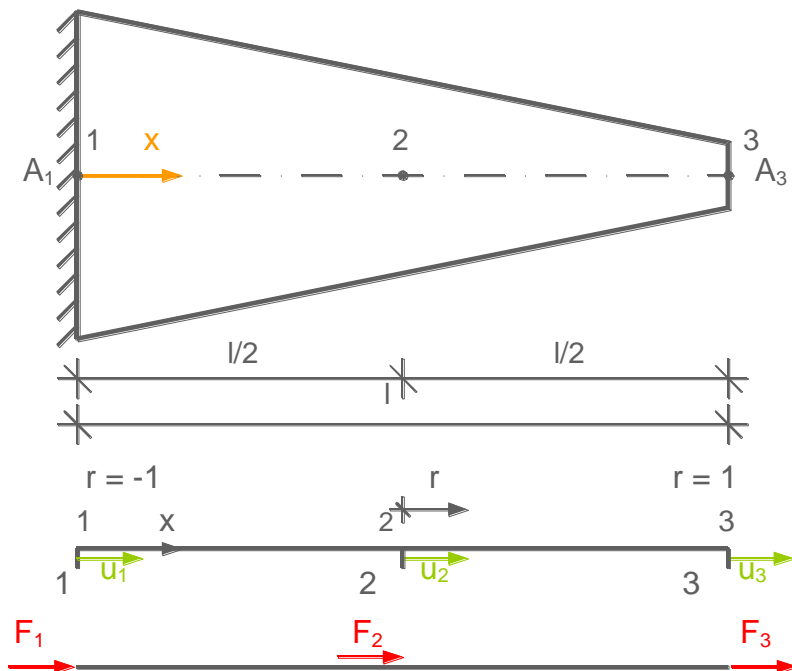
$$\left. + \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{6} \right) \cdot u_1 + \left( -\frac{8}{3} - 2\alpha \right) \cdot u_2 + \left( \frac{7}{3} + \frac{11}{6} \alpha \right) \cdot u_3 \right] \cdot \bar{u}_3 \right)$$

$$= F_1 \cdot \bar{u}_1 + F_2 \cdot \bar{u}_2 + F_3 \cdot \bar{u}_3$$

mit  $\alpha = \frac{A_3 - A_1}{A_1}$

## Beispiel: FE-Lösung – quadratische Ansatzfunktion

### Elementsteifigkeitsmatrix

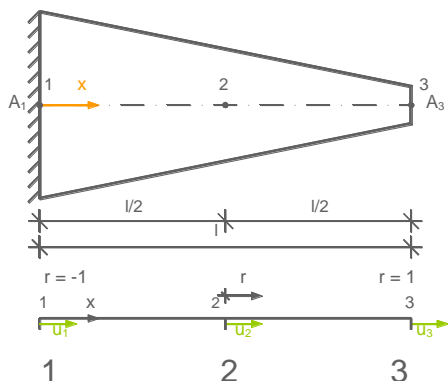


$$\frac{EA_1}{l} \cdot \begin{bmatrix} 7 + \alpha & -\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\alpha & \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{6} \\ \frac{8}{3} + \frac{2}{3}\alpha & \frac{16}{3} + \frac{8}{3}\alpha & -\frac{8}{3} - 2\alpha \\ \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{6} & -\frac{8}{3} - 2\alpha & \frac{7}{3} + \frac{11}{6}\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_e \cdot \underline{u}_e = \underline{F}_e$$

## Beispiel: FE-Lösung – quadratische Ansatzfunktion

### Zahlenbeispiel: Diskretisierung des Stabes in ein Element



$$\begin{aligned}
 A_1 &= 500 \text{ [cm}^2\text{]}, \\
 A_3 &= 100 \text{ [cm}^2\text{]}, \\
 E &= 1000 \text{ [kN/cm}^2\text{]}, \\
 F &= 100 \text{ [kN]} \\
 \ell &= 500 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

**Steifigkeitsbeziehung:**

$$\frac{EA_1}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} \frac{16}{3} + \frac{8}{3}\alpha & -\frac{8}{3} - 2\alpha \\ -\frac{8}{3} - 2\alpha & \frac{7}{3} + \frac{11}{6}\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \quad \text{mit } u_1=0$$

**Verschiebung:**

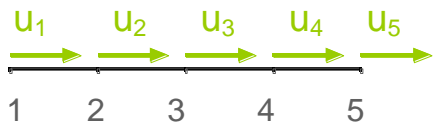
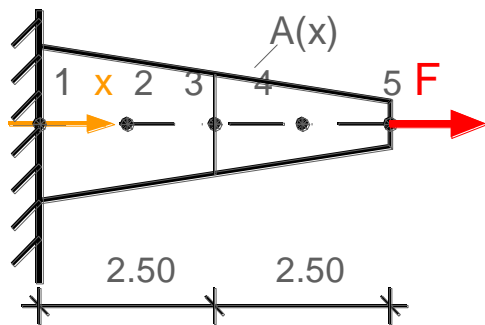
$$1000 \cdot \begin{bmatrix} 3.200 & -1.067 \\ -1.067 & 0.867 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} u_2 &= 0.065 \text{ [cm]} \\ u_3 &= 0.196 \text{ [cm]} \end{aligned}$$

**Elementspannung:**

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= E \cdot (-3 \cdot u_1 + 4 \cdot u_2 - u_3) / \ell = 1000 \cdot (4 \cdot 0.065 - 0.196) / 500 = 0.128 \text{ [kN/cm}^2\text{]} \\
 \sigma_2 &= E \cdot (-u_1 + u_3) / \ell = 1000 \cdot 0.196 / 500 = 0.392 \text{ [kN/cm}^2\text{]} \\
 \sigma_3 &= E \cdot (u_1 - 4 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3) / \ell = 1000 \cdot (-4 \cdot 0.065 + 3 \cdot 0.196) / 500 = 0.656 \text{ [kN/cm}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

## Beispiel: FE-Lösung – quadratische Ansatzfunktion

### Zahlenbeispiel: Diskretisierung des Stabes in zwei Elemente



$$A_1 = 500 \text{ [cm}^2\text{]}, \quad A_3 = 300 \text{ [cm}^2\text{]}, \\ E = 1000 \text{ [kN/cm}^2\text{]}, \quad \ell = 250 \text{ [cm]}$$

Element 1:

$$\frac{EA_1}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} \frac{16}{3} + \frac{8}{3}\alpha & -\frac{8}{3} - 2\alpha \\ -\frac{8}{3} - 2\alpha & \frac{7}{3} + \frac{11}{6}\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

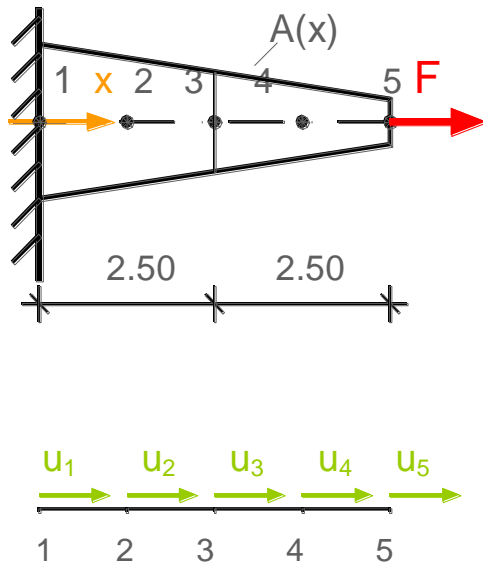
$$2000 \cdot \begin{bmatrix} 4.267 & -1.867 \\ -1.867 & 1.600 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

**Steifigkeitsmatrix**



## Beispiel: FE-Lösung – quadratische Ansatzfunktion

### Zahlenbeispiel: Diskretisierung des Stabes in zwei Elemente



$$A_1 = 500 \text{ [cm}^2\text{]}, \quad A_3 = 300 \text{ [cm}^2\text{]}, \\ E = 1000 \text{ [kN/cm}^2\text{]}, \quad \ell = 250 \text{ [cm]}$$

Element 2:

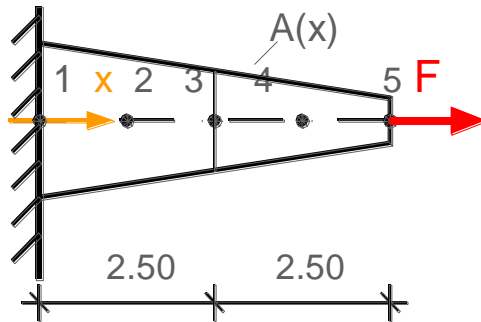
$$\frac{EA_1}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} \frac{7}{3} + \frac{\alpha}{2} & -\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\alpha & \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{6} \\ \frac{8}{3} + \frac{2}{3}\alpha & \frac{16}{3} + \frac{8}{3}\alpha & -\frac{8}{3} - 2\alpha \\ \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{6} & -\frac{8}{3} - 2\alpha & \frac{7}{3} + \frac{11}{6}\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \\ F_5^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$1200 \cdot \begin{bmatrix} 2.000 & -2.222 & 0.222 \\ -2.222 & 3.556 & -1.333 \\ 0.222 & -1.333 & 1.111 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \\ F_5^{(2)} \end{bmatrix}$$

**Steifigkeitsmatrix**

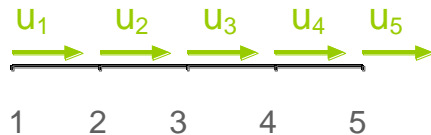
## Beispiel: FE-Lösung – quadratische Ansatzfunktion

### Zahlenbeispiel: Diskretisierung des Stabes in zwei Elemente



#### Globale Steifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} 8533 & -3733 & 0 & 0 \\ -3733 & 5600 & -2667 & 267 \\ 0 & -2667 & 4267 & -1600 \\ 0 & 267 & -1600 & 1333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$



#### Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} u_2 &= 0.028 \text{ [cm]} & u_3 &= 0.064 \text{ [cm]} \\ u_4 &= 0.115 \text{ [cm]} & u_5 &= 0.200 \text{ [cm]} \end{aligned}$$

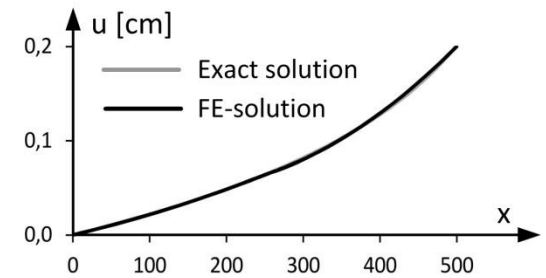
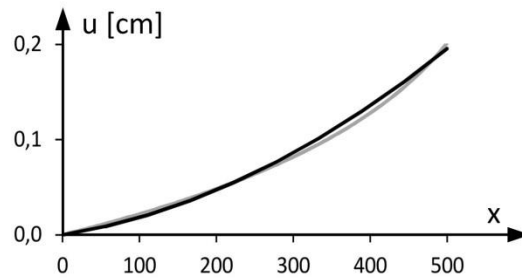
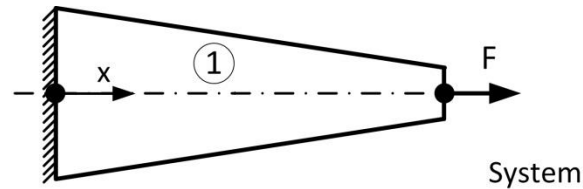
#### Elementspannungen:

$$\begin{aligned} \text{Element 1: } & \sigma_1 = 0.191 \text{ [kN/cm}^2\text{]} \quad \sigma_2 = 0.255 \text{ [kN/cm}^2\text{]} \quad \sigma_3 = 0.319 \text{ [kN/cm}^2\text{]} \\ \text{Element 2: } & \sigma_1 = 0.273 \text{ [kN/cm}^2\text{]} \quad \sigma_2 = 0.545 \text{ [kN/cm}^2\text{]} \quad \sigma_3 = 0.818 \text{ [kN/cm}^2\text{]} \end{aligned}$$

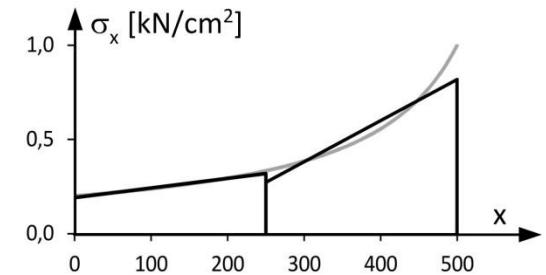
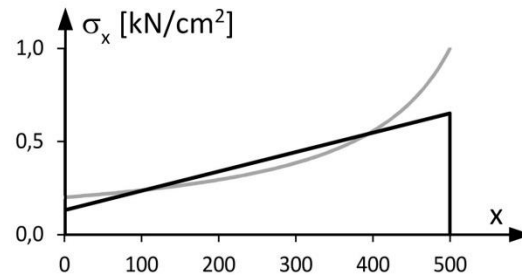
## Beispiel: FE-Lösung – quadratische Ansatzfunktion

### Zahlenbeispiel:

**FEM-Näherung**  
mit einem und mit zwei  
Elementen mit  
quadratischer  
Ansatzfunktion



Displacements



Element stresses

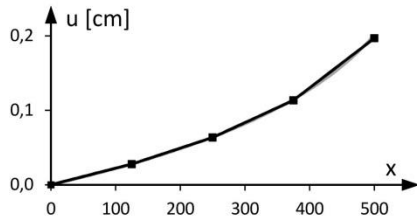
a) 1 element

b) 2 elements

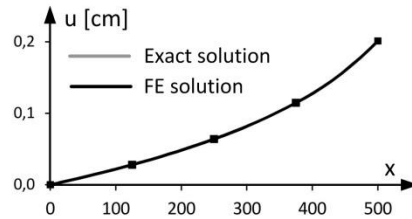
## Beispiel: FE-Lösung – quadratische Ansatzfunktion

### Zahlenbeispiel:

FEM-Näherung mit 4 - 32 Elementen mit linearen und quadratischen Ansatzfunktionen

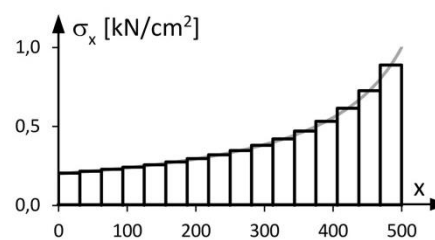


4 elements - linear

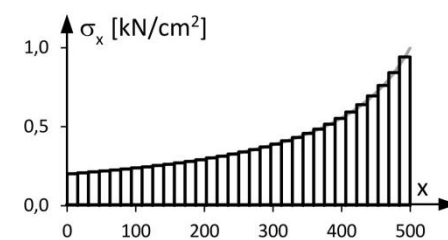


4 elements - quadratic

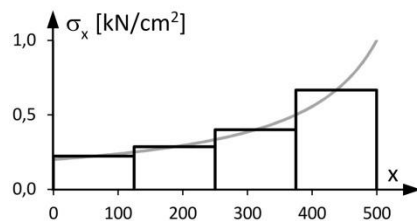
Displacements



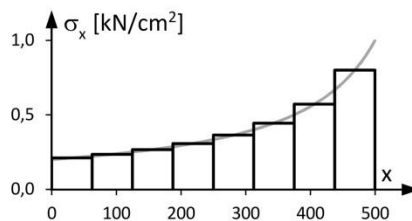
16 elements - linear



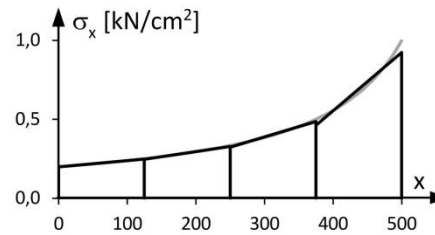
32 elements - linear



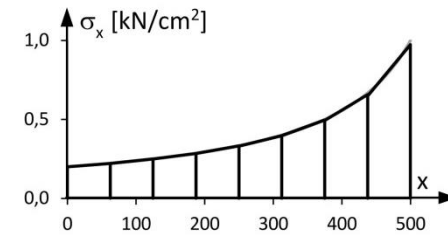
4 elements - linear



8 elements - linear



4 elements - quadratic

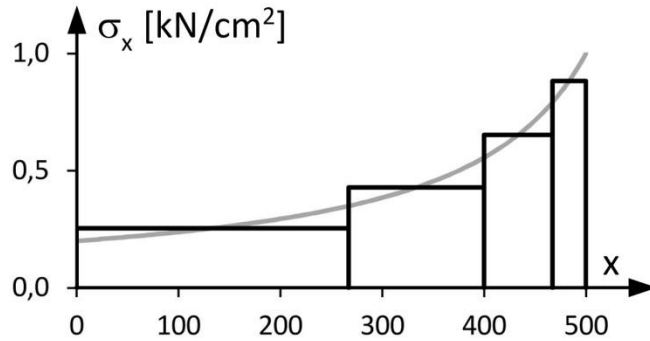


8 elements - quadratic

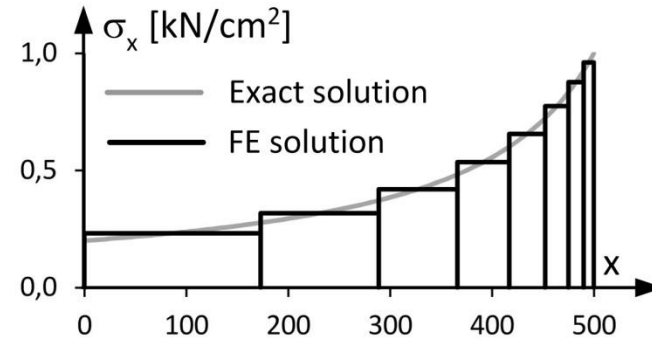
Element stresses

## Beispiel: Stab mit linear veränderlicher Querschnittsfläche

### Anpassung der Elementgröße an den Spannungsgradienten

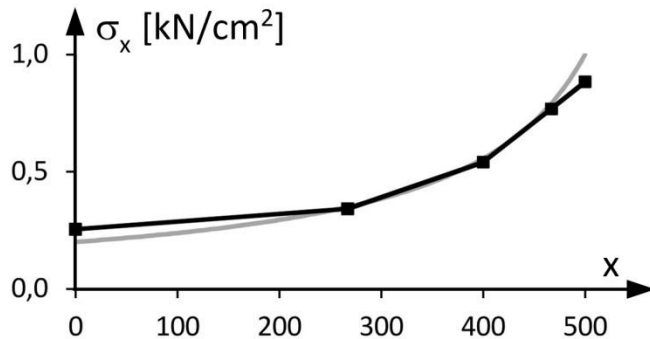


4 elements - linear

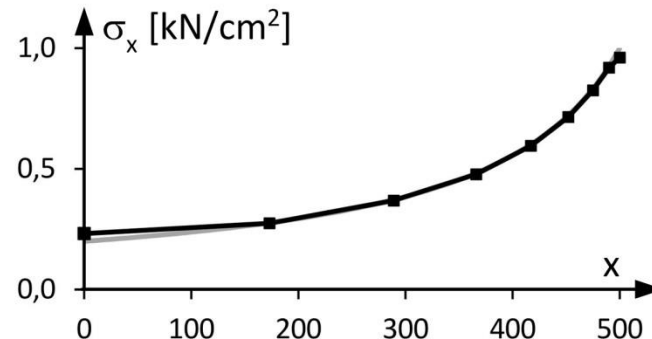


8 elements - linear

Element stresses



4 elements - linear



8 elements - linear

Nodal stresses

## Eigenschaften der FEM-Näherungslösung

---

- a. Die FEM-Lösung nähert die exakte Lösung an. Ihre Genauigkeit wird durch eine Vergrößerung der Elementanzahl bzw. eine Verringerung der Elementgröße erhöht.
- b. Bei Finiten Elementen, die ausschließlich auf Verschiebungsansätzen beruhen, sind die angenäherten Knotenverschiebungen im Mittel zu klein, d. h. das System verhält sich aufgrund des Näherungsansatzes zu „steif“.
- c. Elemente mit höheren Ansatzfunktionen besitzen eine höhere Genauigkeit als Elemente mit niedrigeren Ansatzfunktionen.
- d. Die FEM-Näherung ist bei gleichmäßiger Elementgröße im Bereich geringerer Spannungsgradienten besser als im Bereich höherer Spannungsgradienten.
- e. Die Elementspannungen sind in Elementmitte deutlich genauer als am Elementrand.
- f. Der Spannungssprung zwischen zwei Elementen ist ein Maß für die Genauigkeit an der betreffenden Stelle.
- g. Knotenspannungen besitzen eine höhere Genauigkeit als Elementspannungen. Dies gilt jedoch nicht an den Rändern des Systems. Am Rand sind die Knotenspannungen deutlich ungenauer als in den übrigen Bereichen.

---

**Ende**

**Einführung**

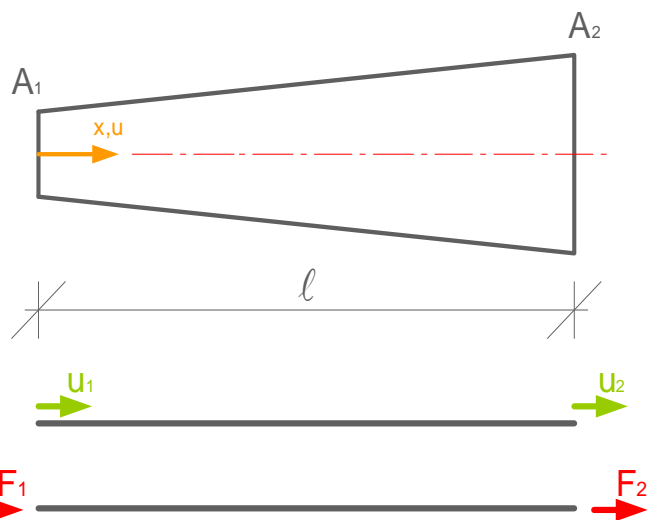
**Stabtragwerke**

**3 Flächentragwerke**

**Modellbildung**

## Beispiel: FE-Lösung und exakte Lösung

### Steifigkeitsmatrix



### Exakte Lösung

$$\frac{E \cdot (A_2 - A_1)}{l \cdot \ln(A_2 / A_1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

### FEM

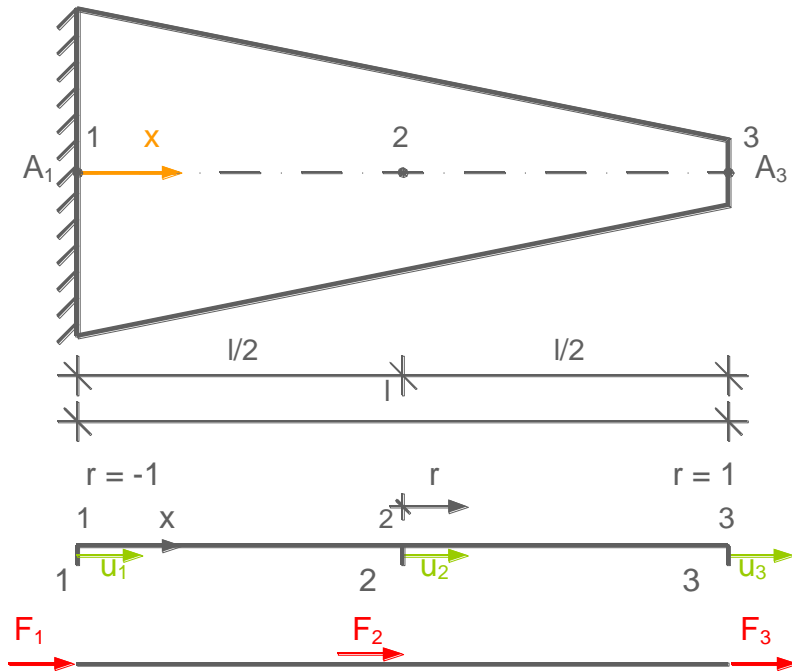
$$\frac{E \cdot (A_1 + A_2)}{2 \cdot l} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$





## Beispiel: FE-Lösung – quadratische Ansatzfunktion

Steifigkeitsmatrix:



$$\frac{EA_1}{l} \cdot \begin{bmatrix} 7 + \frac{\alpha}{3} & -\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\alpha & \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{6} \\ 8 & \frac{16}{3} + \frac{8}{3}\alpha & \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{6} & -\frac{8}{3} - 2\alpha & \frac{7}{3} + \frac{11}{6}\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_e \cdot \underline{u}_e = \underline{F}_e$$

mit  $\alpha = \frac{A_3 - A_1}{A_1}$

