
Finite Elemente in der Baustatik

Einführung

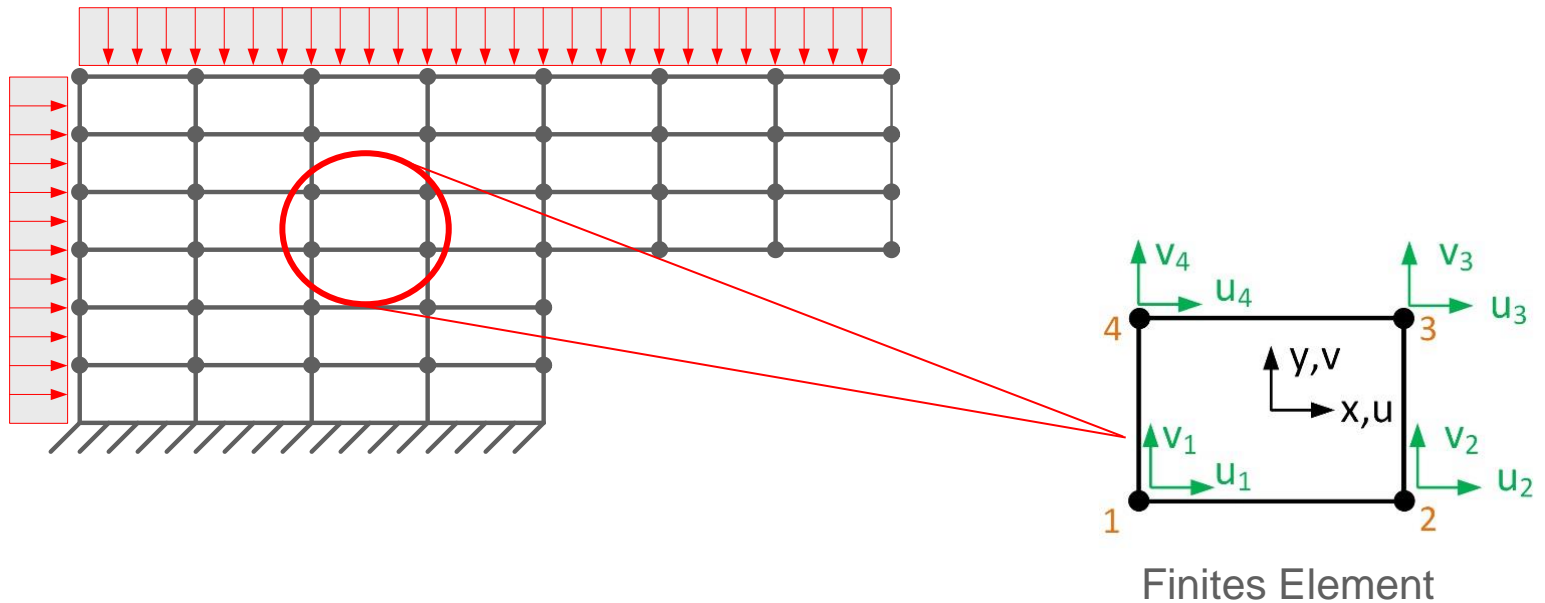
Stabtragwerke

3 Flächentragwerke

Modellbildung

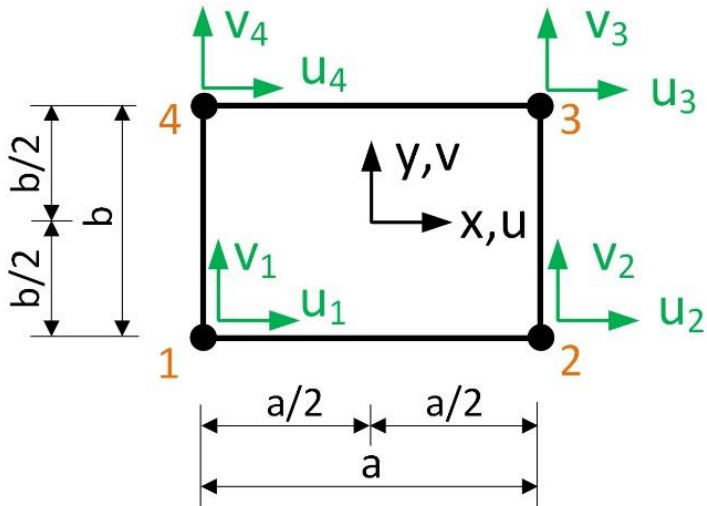
Rechteckelement für Scheiben

Diskretisierung einer Scheibe in Finite Elemente

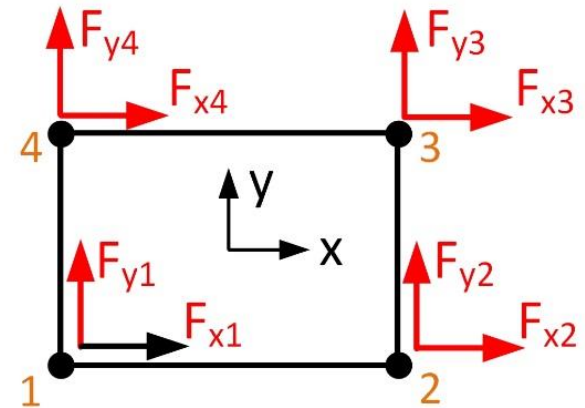


Rechteckelement für Scheiben

Freiheitsgrade und Elementkräfte



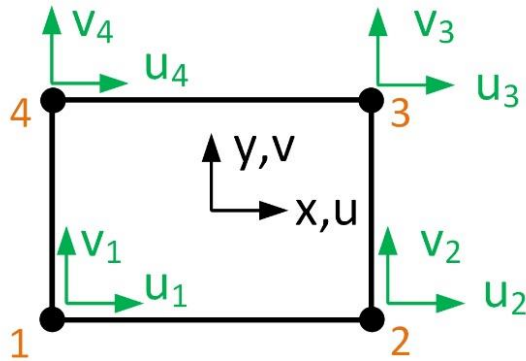
Verschiebungen



Elementkräfte

Rechteckelement für Scheiben

Ansatzfunktionen der Verschiebungen

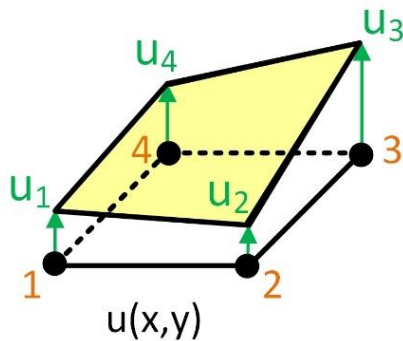
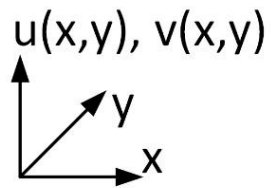


Bilineare Ansatzfunktionen:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x \cdot y$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 \cdot x + \beta_3 \cdot y + \beta_4 \cdot x \cdot y$$

bilinearer Term



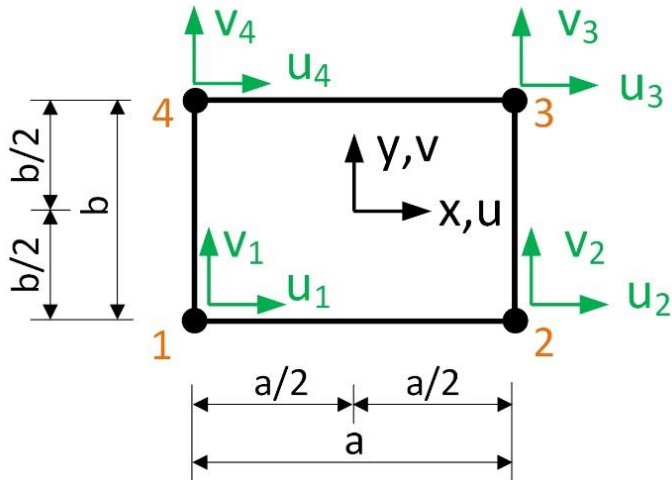
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \underline{N}_a \cdot \underline{a}$$

Ansatzfunktion für **u**

Rechteckelement für Scheiben

Ansatzfunktionen der Verschiebungen



Knotenpunktverschiebungen

Knoten 1:

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (-a/2) + \alpha_3 \cdot (-b/2) + \alpha_4 \cdot (-a/2) \cdot (-b/2),$$

$$v_1 = \beta_1 + \beta_2 \cdot (-a/2) + \beta_3 \cdot (-b/2) + \beta_4 \cdot (-a/2) \cdot (-b/2),$$

Knoten 2:

$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (a/2) + \alpha_3 \cdot (-b/2) + \alpha_4 \cdot (a/2) \cdot (-b/2),$$

$$v_2 = \beta_1 + \beta_2 \cdot (a/2) + \beta_3 \cdot (-b/2) + \beta_4 \cdot (a/2) \cdot (-b/2),$$

Knoten 3:

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (a/2) + \alpha_3 \cdot (b/2) + \alpha_4 \cdot (a/2) \cdot (b/2),$$

$$v_3 = \beta_1 + \beta_2 \cdot (a/2) + \beta_3 \cdot (b/2) + \beta_4 \cdot (a/2) \cdot (b/2),$$

Knoten 4:

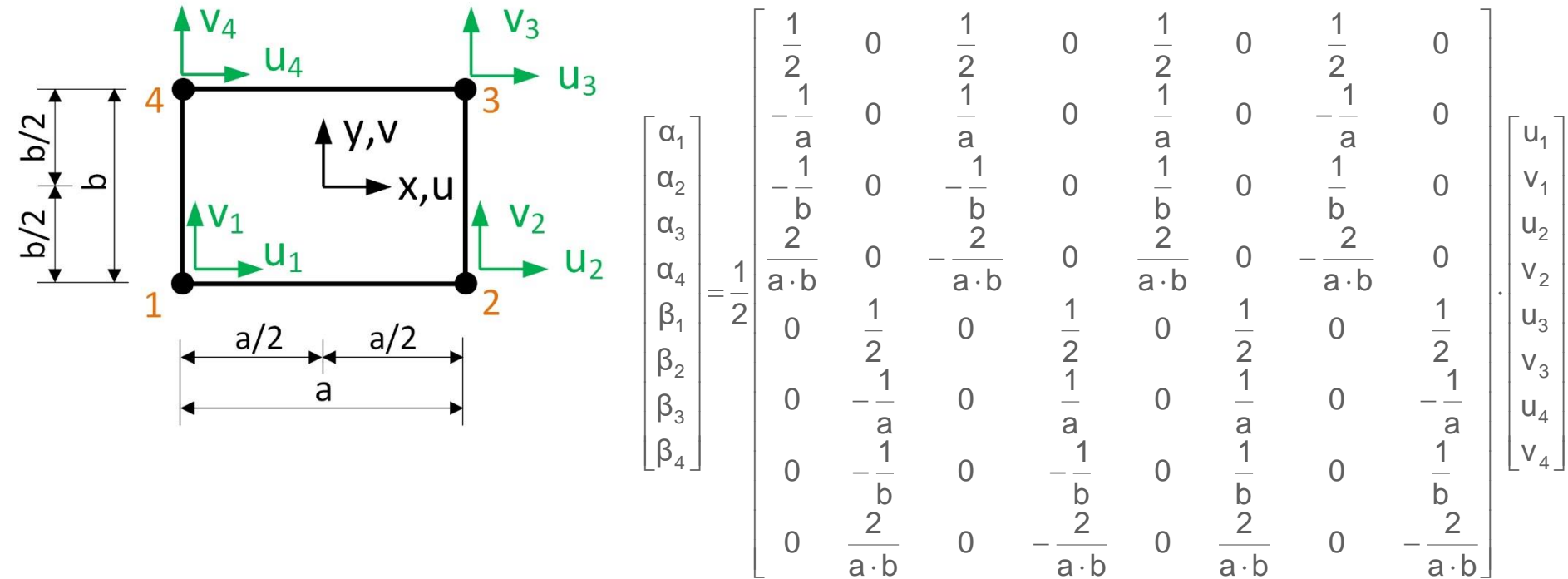
$$u_4 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (-a/2) + \alpha_3 \cdot (b/2) + \alpha_4 \cdot (-a/2) \cdot (b/2),$$

$$v_4 = \beta_1 + \beta_2 \cdot (-a/2) + \beta_3 \cdot (b/2) + \beta_4 \cdot (-a/2) \cdot (b/2).$$

Die Parameter α_1 - α_4 und β_1 - β_4 werden ausgedrückt durch die Knotenpunktverschiebungen u_1, v_1 bis u_4, v_4 .

Rechteckelement für Scheiben

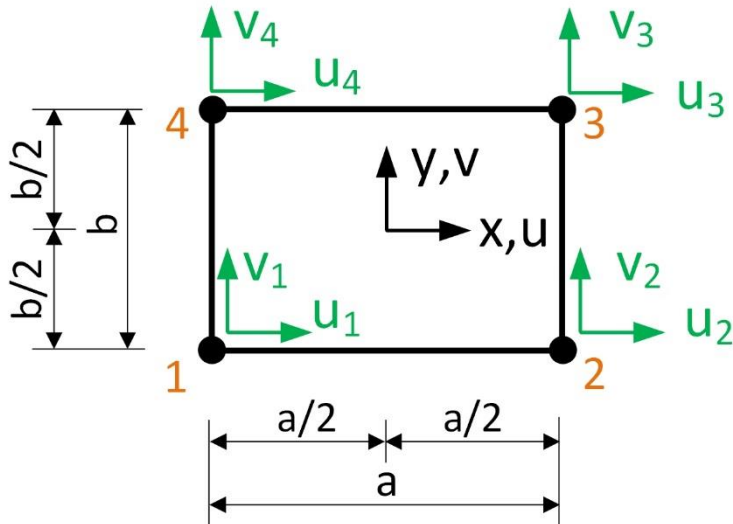
Ansatzfunktionen der Verschiebungen



$$\underline{a} = \underline{A} \cdot \underline{u}_e$$

Rechteckelement für Scheiben

Ansatzfunktionen der Verschiebungen



Verschiebungen \underline{u} , ausgedrückt durch \underline{a}

$$\underline{u} = \underline{N}_a \cdot \underline{a}$$

$$\underline{a} = \underline{A} \cdot \underline{u}_e$$

\underline{a} , ausgedrückt durch die Knotenverschiebungen \underline{u}_e

$$\underline{u} = \underline{N}_a \cdot \underline{A} \cdot \underline{u}_e$$

oder

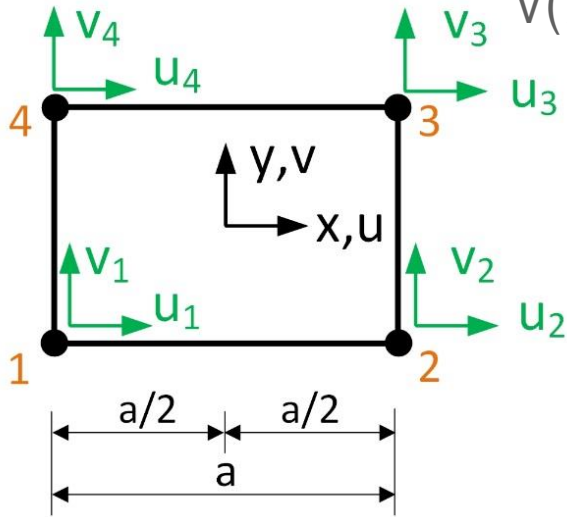
$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{u}_e$$

Rechteckelement für Scheiben

Ansatzfunktionen der Verschiebungen

$$u(x, y) = N_1(x, y) \cdot u_1 + N_2(x, y) \cdot u_2 + N_3(x, y) \cdot u_3 + N_4(x, y) \cdot u_4$$

$$v(x, y) = N_1(x, y) \cdot v_1 + N_2(x, y) \cdot v_2 + N_3(x, y) \cdot v_3 + N_4(x, y) \cdot v_4$$



$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{u}_e$$

mit:

$$N_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2a}x - \frac{1}{2b}y + \frac{1}{ab}xy \quad N_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2a}x - \frac{1}{2b}y - \frac{1}{ab}xy \quad N_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2a}x + \frac{1}{2b}y + \frac{1}{ab}xy \quad N_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2a}x + \frac{1}{2b}y - \frac{1}{ab}xy$$

Rechteckelement für Scheiben

Ansatzfunktionen der Verschiebungen

Ansatzfunktionen

$$N_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2a}x - \frac{1}{2b}y + \frac{1}{ab}xy$$

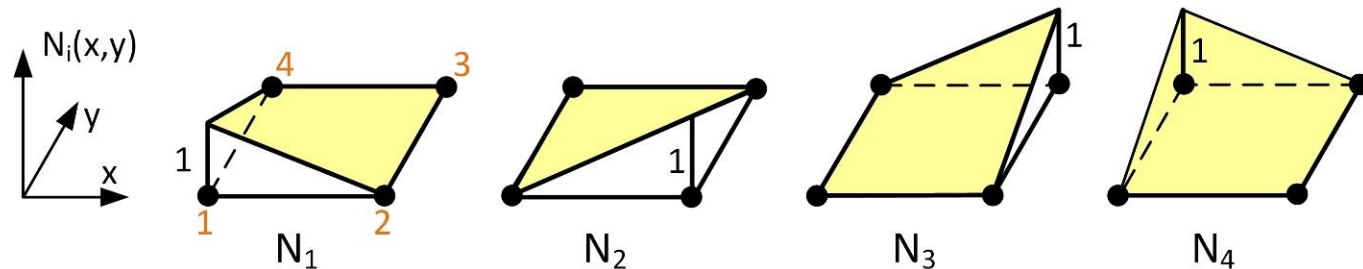
$$N_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2a}x - \frac{1}{2b}y - \frac{1}{ab}xy$$

$$N_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2a}x + \frac{1}{2b}y + \frac{1}{ab}xy$$

$$N_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2a}x + \frac{1}{2b}y - \frac{1}{ab}xy$$

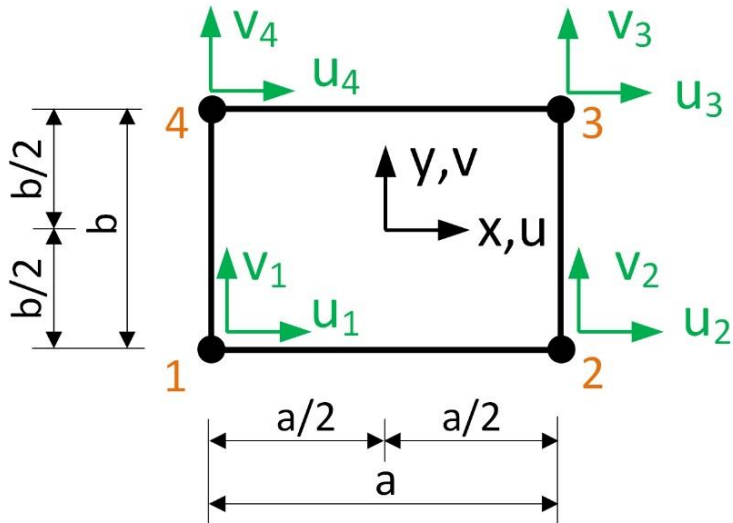
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{u}_e$$



Rechteckelement für Scheiben

Elementverschiebungen



$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{u}_e$$

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + x \cdot \frac{1}{2a}(-u_1 + u_2 + u_3 - u_4) + y \cdot \frac{1}{2b}(-u_1 - u_2 + u_3 + u_4) + x \cdot y \cdot \frac{1}{ab}(u_1 - u_2 + u_3 - u_4)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + x \cdot \frac{1}{2a}(-v_1 + v_2 + v_3 - v_4) + y \cdot \frac{1}{2b}(-v_1 - v_2 + v_3 + v_4) + x \cdot y \cdot \frac{1}{ab}(v_1 - v_2 + v_3 - v_4)$$

Rechteckelement für Scheiben

Dehnungen

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{u}_e$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2ab} \begin{bmatrix} 2y-b & 0 & -2y+b & 0 & 2y+b & 0 & -2y-b & 0 \\ 0 & 2x-a & 0 & -2x-a & 0 & 2x+a & 0 & -2x+a \\ 2x-a & 2y-b & -2x-a & -2y+b & 2x+a & 2y+b & -2x+a & -2y-b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Ansatzfunktionen

Rechteckelement für Scheiben

Spannungen

Dehnungen

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{u}_e$$

Hooksches Gesetz

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\varepsilon}$$

Spannungsvektor

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}_e$$

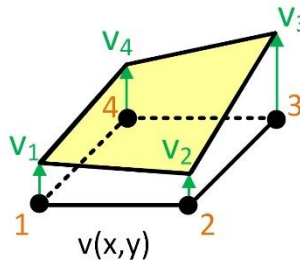
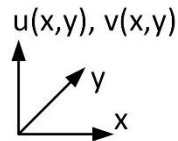
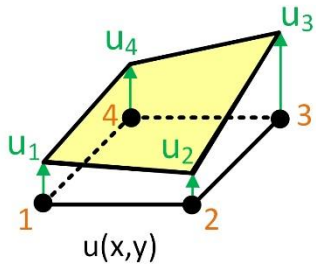
mit

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$$

Rechteckelement für Scheiben

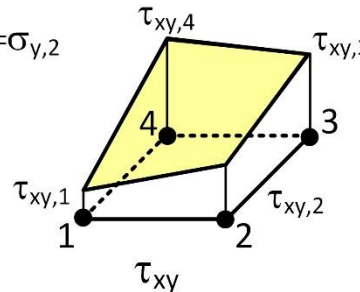
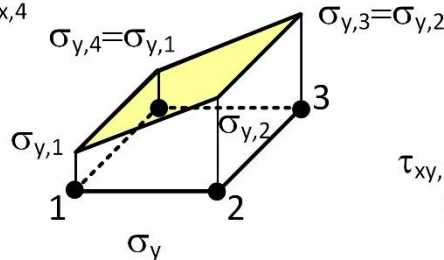
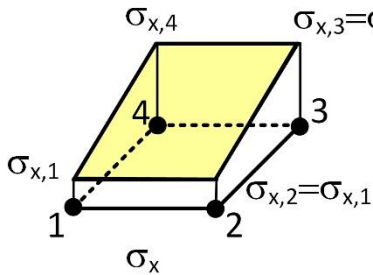
Ansatzfunktionen des rechteckförmigen Scheibenlements und daraus abgeleitete Spannungen

Ansatzfunktionen



bilineare Funktionen

Spannungsverläufe - abgeleitet aus den Ansatzfunktionen



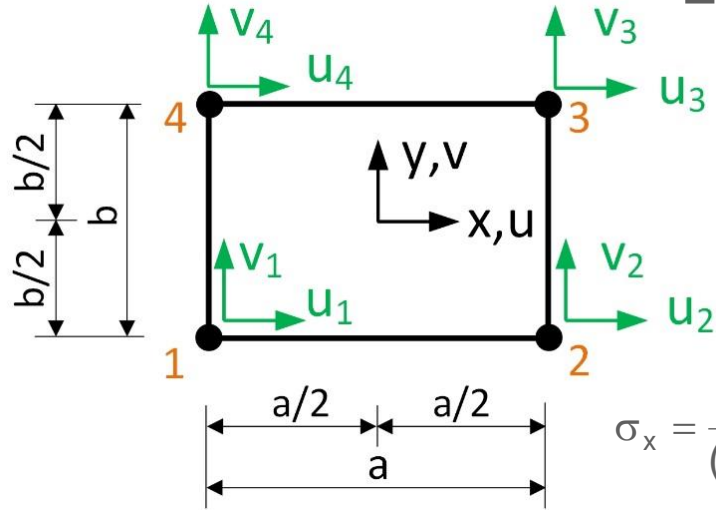
für $\mu = 0$:

σ_x konstant in x-Richtung
linear in y-Richtung

σ_y konstant in y-Richtung
linear in x-Richtung

Rechteckelement für Scheiben

Elementspannungen



$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}_e$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\mu^2) \cdot 2 \cdot a \cdot b} \cdot [(2 \cdot y - b) \cdot (u_1 - u_2) + (2 \cdot y + b) \cdot (u_3 - u_4) + \mu \cdot ((2 \cdot x - a) \cdot (v_1 - v_4) + (2 \cdot x + a) \cdot (-v_2 + v_3))]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\mu^2) \cdot 2 \cdot a \cdot b} \cdot [\mu \cdot ((2 \cdot y - b) \cdot (u_1 - u_2) + (2 \cdot y + b) \cdot (u_3 - u_4)) + (2 \cdot x - a) \cdot (v_1 - v_4) + (2 \cdot x + a) \cdot (-v_2 + v_3)]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{4 \cdot (1 + \mu) \cdot a \cdot b} \cdot [(2 \cdot y - b) \cdot (v_1 - v_2) + (2 \cdot y + b) \cdot (v_3 - v_4) + (2 \cdot x - a) \cdot (u_1 - u_4) + (2 \cdot x + a) \cdot (u_3 - u_2)]$$

Rechteckelement für Scheiben

Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Prinzip der virtuellen Arbeit: $\overline{W}_i = \overline{W}_a$

Innere Arbeit: $\overline{W}_i = t \int \underline{\overline{\varepsilon}}^T \cdot \underline{\sigma} \, dx \, dy$

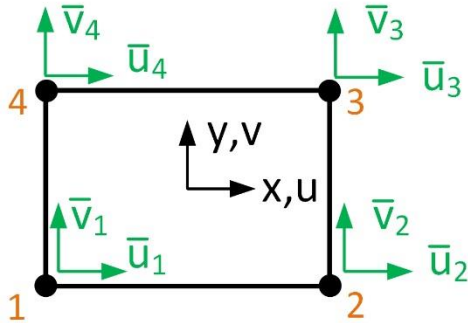
$$\underline{\overline{\varepsilon}} = \underline{B} \cdot \underline{\overline{u}}_e \quad \underline{\overline{\varepsilon}}^T = \underline{\overline{u}}_e^T \cdot \underline{B}^T \quad \underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\varepsilon} = \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}_e$$

$$\overline{W}_i = t \cdot \int \underline{\overline{u}}_e^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}_e \, dx \, dy$$

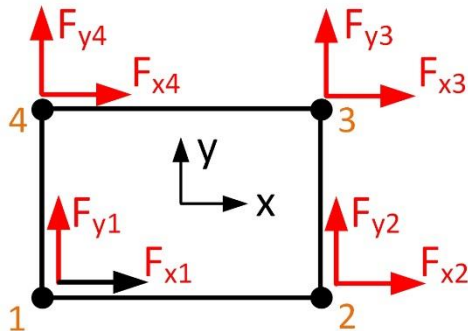
$$\overline{W}_i = \underline{\overline{u}}_e^T \cdot t \int \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \, dx \, dy \cdot \underline{u}_e$$

Rechteckelement für Scheiben

Prinzip der virtuellen Verschiebungen



Virtuelle Verschiebungen



Reale Kräfte

Äußere Arbeit

Geleistet von den Element-Knotenkräften:

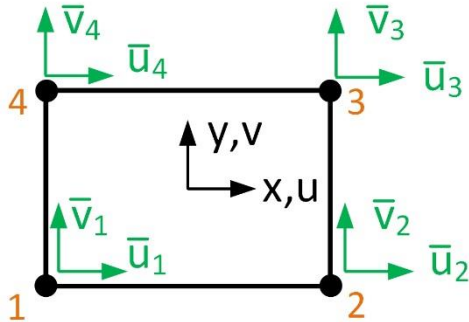
$$\bar{W}_a = \bar{\underline{u}}_e^T \cdot \underline{F}_e$$

$$\bar{W}_a = [\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{u}_3 \quad \bar{v}_3 \quad \bar{u}_4 \quad \bar{v}_4] \cdot$$

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}$$

Rechteckelement für Scheiben

Prinzip der virtuellen Verschiebungen



Virtuelle Verschiebungen

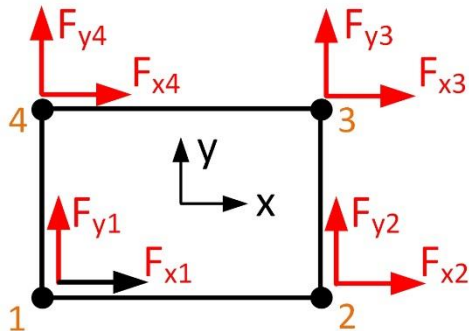
$$\overline{W}_a = \underline{\bar{u}}_e^T \cdot \underline{F}_e \quad \overline{W}_i = \underline{\bar{u}}_e^T \cdot t \int \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \, dx \, dy \cdot \underline{u}_e$$

$$\overline{W}_i = \overline{W}_a$$

$$\underline{\bar{u}}_e^T \cdot t \int \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \, dx \, dy \cdot \underline{u}_e = \underline{\bar{u}}_e^T \cdot \underline{F}_e$$

Dies gilt für beliebige virtuelle Verschiebungszustände $\underline{\bar{u}}_e$

$$\rightarrow t \cdot \int \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \, dx \, dy \cdot \underline{u}_e = \underline{F}_e$$



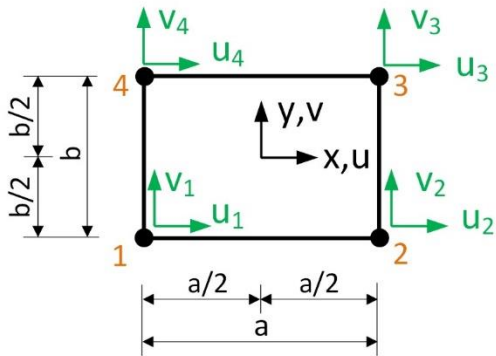
Reale Kräfte

$$\underline{K}^{(e)} \cdot \underline{u}_e = \underline{F}_e$$

$$\underline{K}^{(e)} = t \cdot \int \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \, dx \, dy$$

Rechteckelement für Scheiben

Steifigkeitsmatrix des Rechteck-Scheibenelements



$$\frac{E \cdot t}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}$$

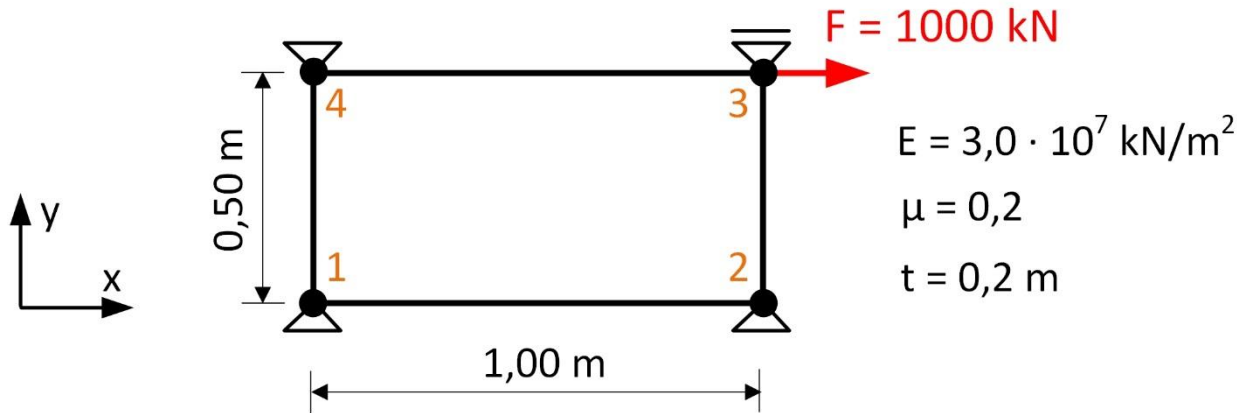
Elemente der Steifigkeitsmatrix

Elementspannungen

$$\underline{K}^{(e)} \cdot \underline{u}_e = \underline{F}_e$$

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Scheibenelement mit einem einzigen Freiheitsgrad



Aus der Steifigkeitsmatrix: $k_{55} \cdot u_3 = F_{x3}$ mit:

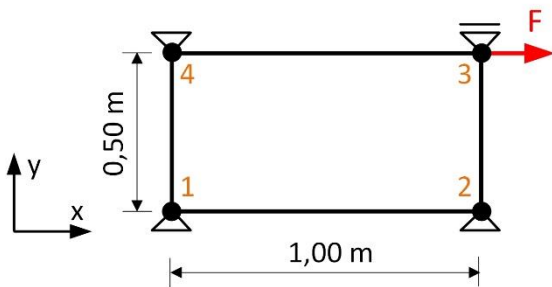
$$k_{55} = \frac{E \cdot t}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \left(4 \cdot \frac{b}{a} + 2 \cdot (1 - \mu) \frac{a}{b} \right) = \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 0.2}{12 \cdot (1 - 0.2^2)} \left(4 \cdot \frac{0.5}{1.0} + 2 \cdot (1 - 0.2) \frac{1.0}{0.5} \right) = 2.70 \cdot 10^6 \text{ [kN/m]}$$

$$u_3 = F_{x3} / k_{55} = 1000 / 2.7 \cdot 10^6 = 3.69 \cdot 10^{-4} \text{ [m]}$$

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Scheibenelement mit einem einzigen Freiheitsgrad

Ergebnis:
Festhaltekräfte in [kN]



$$F_{x1} = k_{15} \cdot u_3 = 5.21 \cdot 10^5 \left(-2 \cdot \frac{0.5}{1.0} - (1 - 0.2) \cdot \frac{1.0}{0.5} \right) \cdot 3.69 \cdot 10^{-4} = -500$$

$$F_{y1} = k_{25} \cdot u_3 = 5.21 \cdot 10^5 \left(-\frac{3}{2} \cdot (1 + 0.2) \cdot \frac{1.0}{0.5} \right) \cdot 3.69 \cdot 10^{-4} = -346$$

$$F_{x2} = k_{35} \cdot u_3 = 5.21 \cdot 10^5 \left(2 \cdot \frac{0.5}{1.0} - 2 \cdot (1 - 0.2) \cdot \frac{1.0}{0.5} \right) \cdot 3.69 \cdot 10^{-4} = -423$$

$$F_{y2} = k_{45} \cdot u_3 = 5.21 \cdot 10^5 \left(\frac{3}{2} \cdot (1 - 3 \cdot 0.2) \right) \cdot 3.69 \cdot 10^{-4} = 115$$

$$F_{y3} = k_{65} \cdot u_3 = 5.21 \cdot 10^5 \left(\frac{3}{2} \cdot (1 + 0.2) \right) \cdot 3.69 \cdot 10^{-4} = 346$$

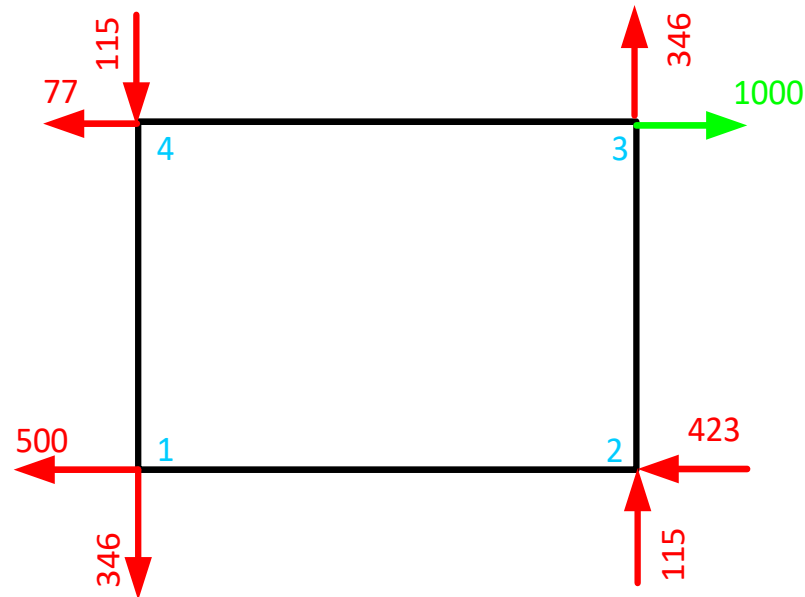
$$F_{x4} = k_{75} \cdot u_3 = 5.21 \cdot 10^5 \left(-4 \cdot \frac{0.5}{1.0} + (1 - 0.2) \cdot \frac{1.0}{0.5} \right) \cdot 3.69 \cdot 10^{-4} = -77$$

$$F_{y4} = k_{85} \cdot u_3 = 5.21 \cdot 10^5 \left(-\frac{3}{2} \cdot (1 - 3 \cdot 0.2) \right) \cdot 3.69 \cdot 10^{-4} = 115$$

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Scheibenelement mit einem einzigen Freiheitsgrad

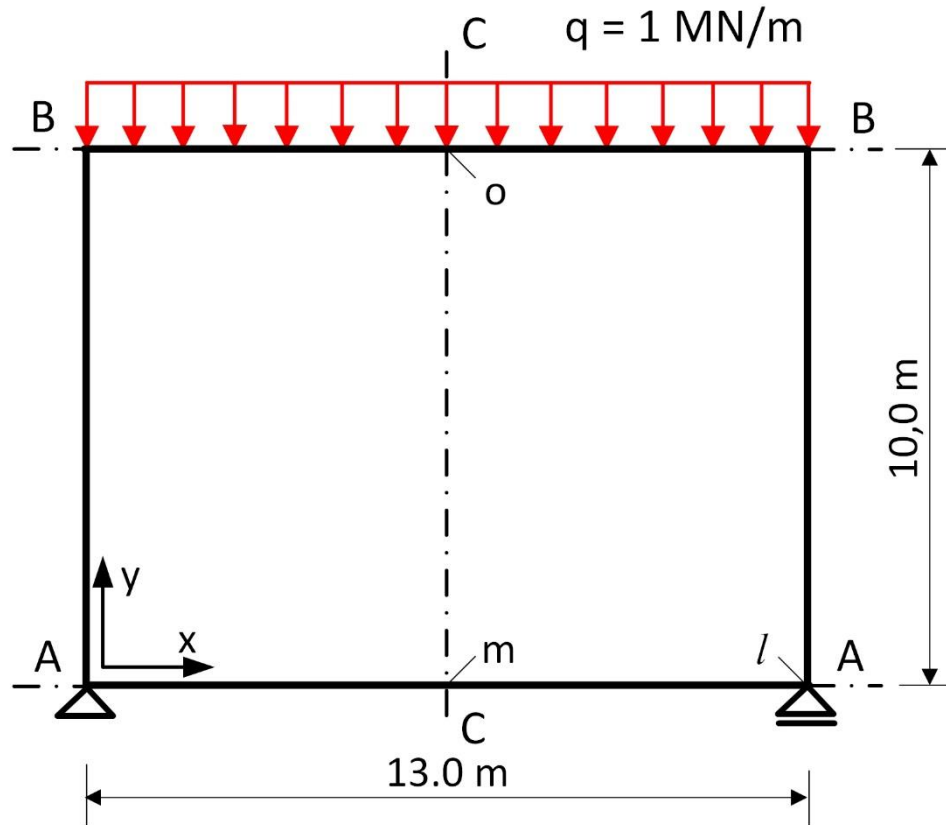
Festhaltekkräfte in [kN]



Die Elementkräfte erfüllen die Gleichgewichtsbedingungen!

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Wandscheibe



$$E = 3,0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

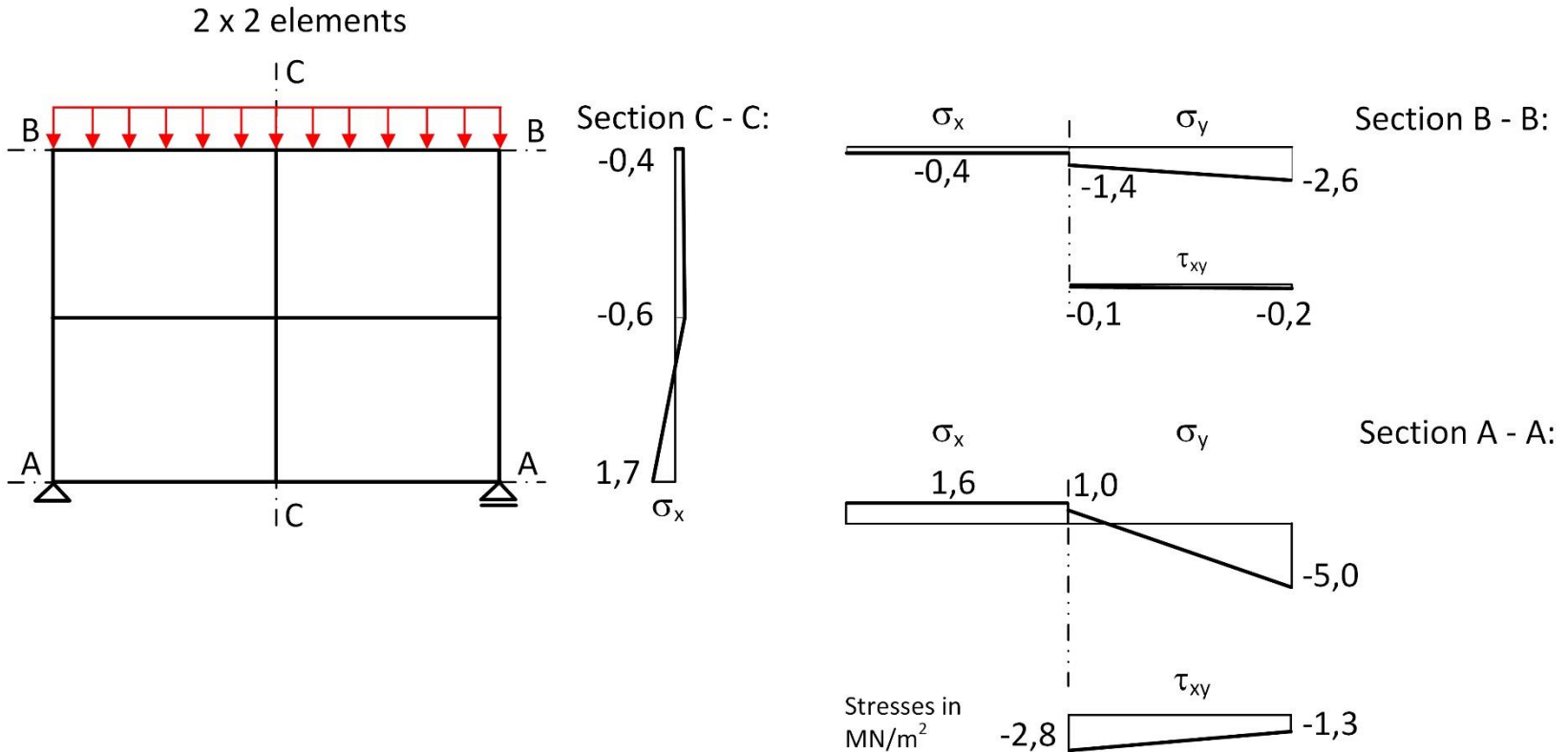
$$\mu = 0$$

$$t = 0,5 \text{ m}$$

Balkentheorie

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Wandscheibe

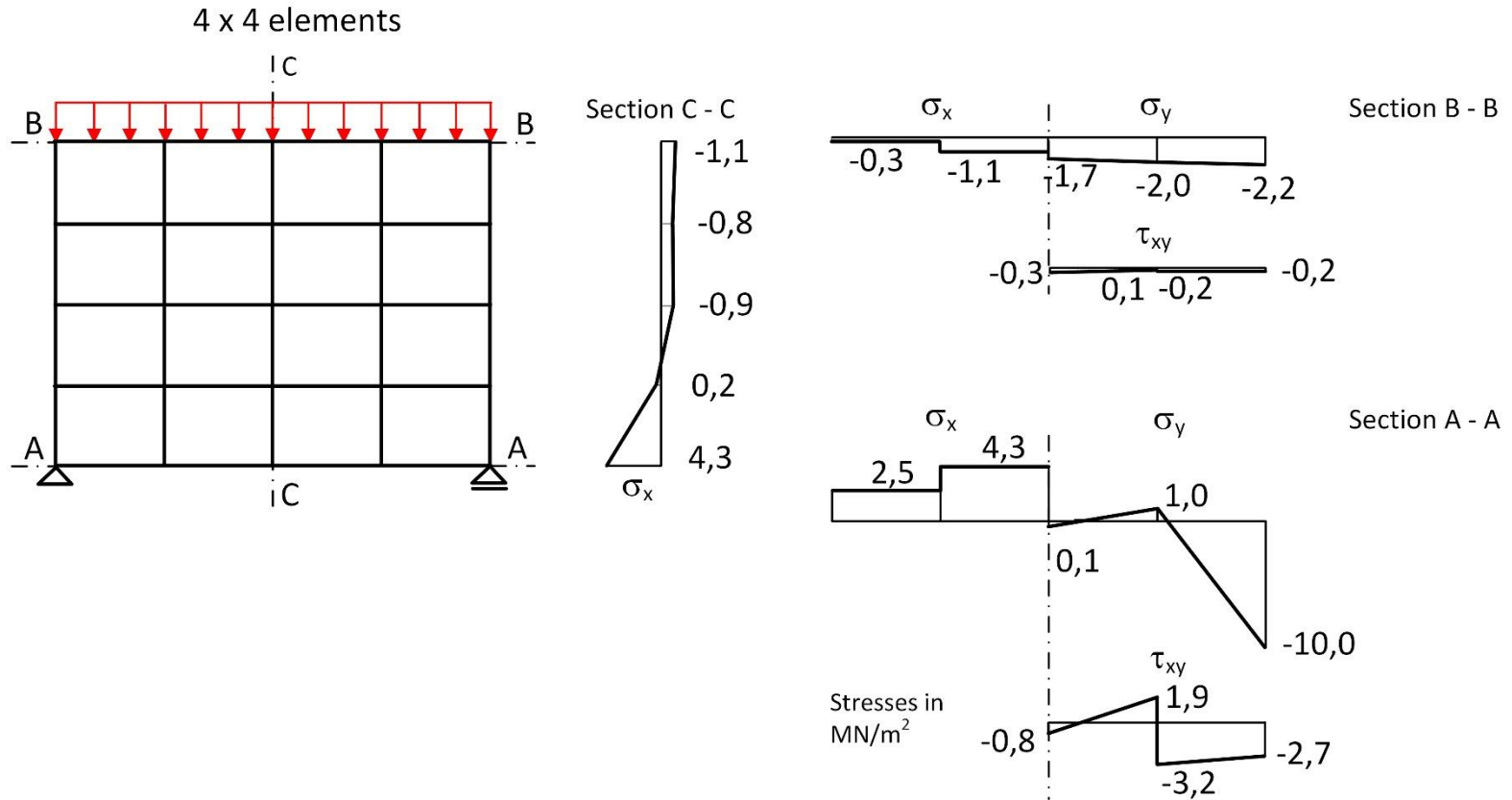


Spannungen bei einer 2x2 FE-Diskretisierung

Ansatzfunktionen

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Wandscheibe

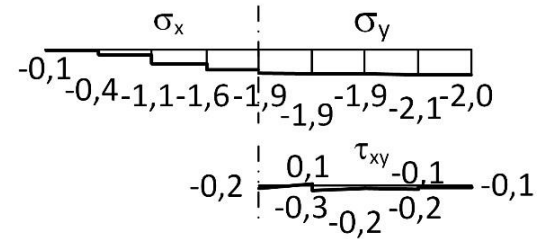
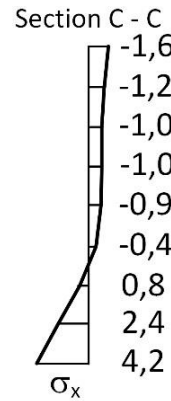
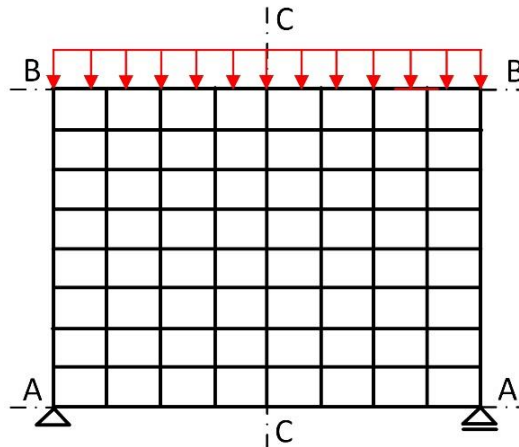


Spannungen bei einer 4x4 FE-Diskretisierung

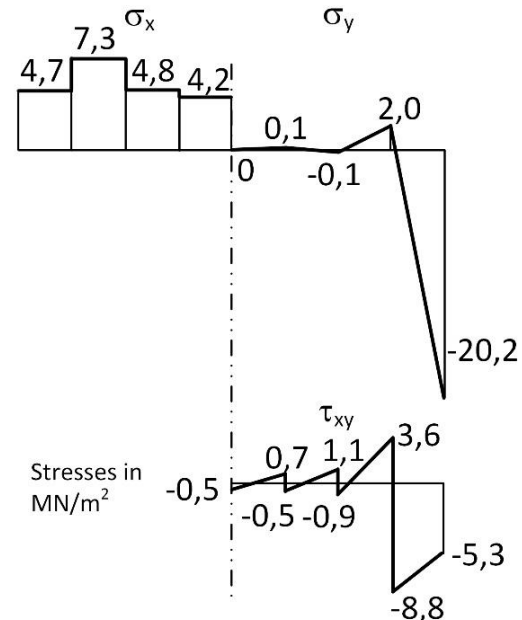
Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Wandscheibe

8 x 8 elements



Section C - C



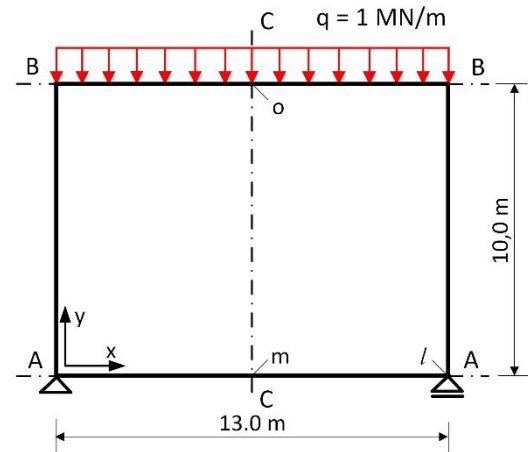
Section A - A

Stresses in
MN/m²

Spannungen bei einer 8x8 FE-Diskretisierung

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Wandscheibe



* Werte sind wegen der Singularität nicht physikalisch sinnvoll!

Ergebnisse:

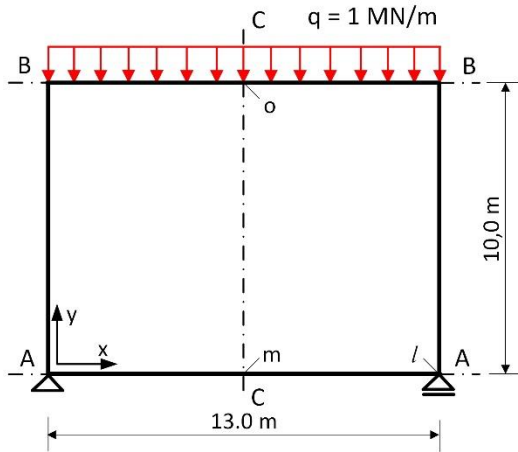
	$\sigma_{x, \text{Mitte, oben}}$	$\sigma_{x, \text{Mitte, unten}}$	$\sigma_{y, \text{Lage}}^*$	W Mitte, unten [*]
2x2	-0,4	1,6	-5,0	$-1,22 \cdot 10^{-5}$
4x4	-1,1	4,3	-10,0	$-1,76 \cdot 10^{-5}$
8x8	-1,6	4,2	-20,0	$-2,40 \cdot 10^{-5}$
16x16	-1,8	4,2	-40,9	$-3,05 \cdot 10^{-5}$
32x32	-1,8	4,3	-80,8	$-3,69 \cdot 10^{-5}$

$\sigma_{x, \text{Mitte, oben}}$ and $\sigma_{x, \text{Mitte, unten}}$ konvergieren bei Netzverfeinerung zu einem konstanten Wert.

➔ Spannungen sind verlässlich für eine 8x8-Diskretisierung sowie für feinere Netze.

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Wandscheibe



Konvergenz am Punktlager:

Am Lager nimmt σ_y bei einer Netzverfeinerung kontinuierlich zu:

$$5 \rightarrow 10 \rightarrow 20 \dots$$

Dies deutet auf eine Spannungssingularität hin.

Die berechneten Spannungswerte sind physikalisch sinnlos!

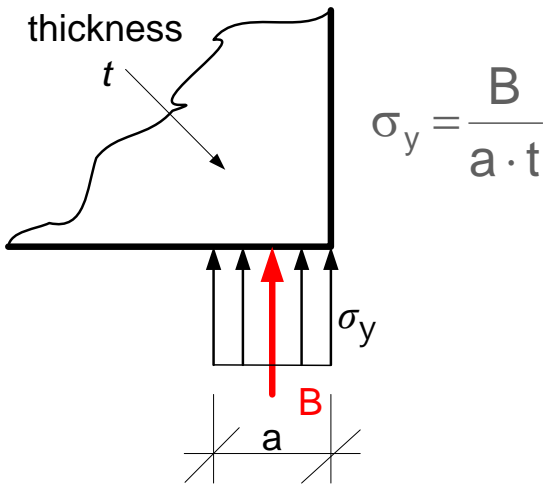
Ursache

Am Punktlager ist: $a \rightarrow 0 \rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \sigma_y = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{B}{a \cdot t} = \infty$

Die FE-Spannungen nähern sich bei Netzverfeinerung dem Wert ∞ an.

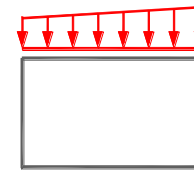
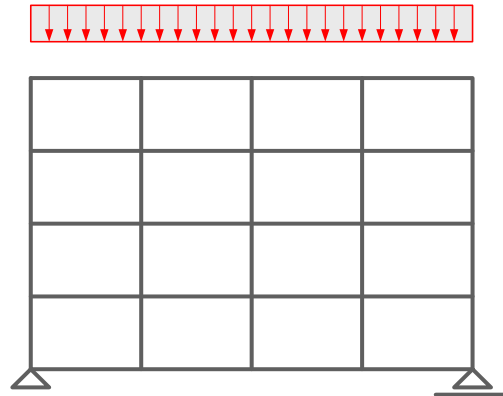
Weitere Singularitäten im Modell:

- Schubspannungen am Lager.
- Vertikale Verschiebungen am Lager

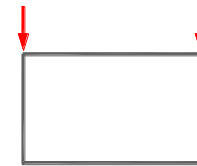


Rechteckelement für Scheiben

Elementlasten



Elementlast



Äquivalente Knotenkräfte

Äquivalente Knotenkräfte für Elementlasten

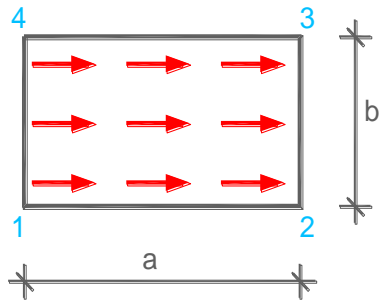
Die zu einer Elementlast äquivalenten Knotenkräfte sind diejenigen Kräfte, die mit den virtuellen Knotenverschiebungen dieselbe (virtuelle äußere) Arbeit leisten wie die Elementlasten mit den ihnen entsprechenden virtuellen Verschiebungen.

Rechteckelement für Scheiben

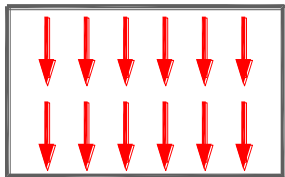
Elementlasten

Flächenlasten

Flächenlast p_x



Flächenlast p_y



Kräfte

$$\bar{W}_a = \int \bar{u} \cdot p_x \, dx \, dy + \int \bar{v} \cdot p_y \, dx \, dy$$

$$\bar{W}_a = \int (\bar{u} \cdot p_x + \bar{v} \cdot p_y) \, dx \, dy = \int \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \, dx \, dy$$

$$= \int \bar{\underline{u}}^T \cdot \underline{p} \, dx \, dy \quad \text{mit} \quad \bar{\underline{u}} = \underline{N} \cdot \underline{u}_e \Rightarrow \bar{\underline{u}}^T = \underline{u}_e^T \cdot \underline{N}^T$$

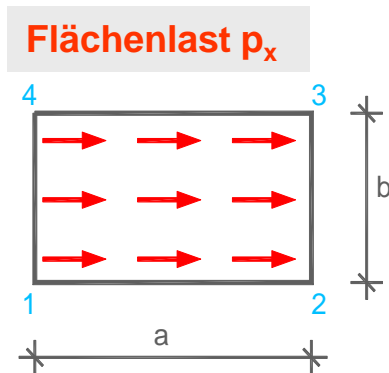
$$\bar{W}_a = \underline{u}_e^T \cdot \int \underline{N}^T \cdot \underline{p} \, dx \, dy$$

Ansatzfunktion der Verschiebungen

Rechteckelement für Scheiben

Elementlasten

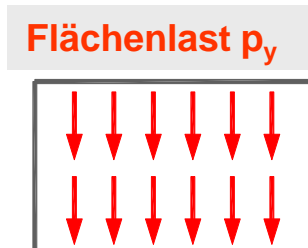
Flächenlasten



$$\overline{W}_a = \underline{\underline{u}}_e^T \cdot \underline{\underline{F}}_L$$

Äußere Arbeit

$$\underline{\underline{u}}_e^T \cdot \underline{\underline{F}}_L = \underline{\underline{u}}_e^T \cdot \int \underline{\underline{N}}^T \cdot \underline{p} \, dx \, dy$$



Äquivalente Knotenkräfte

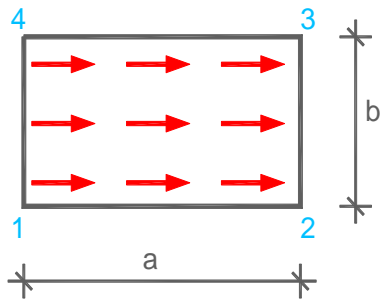
$$\underline{\underline{F}}_L = \int \underline{\underline{N}}^T \cdot \underline{p} \, dx \, dy$$

Rechteckelement für Scheiben

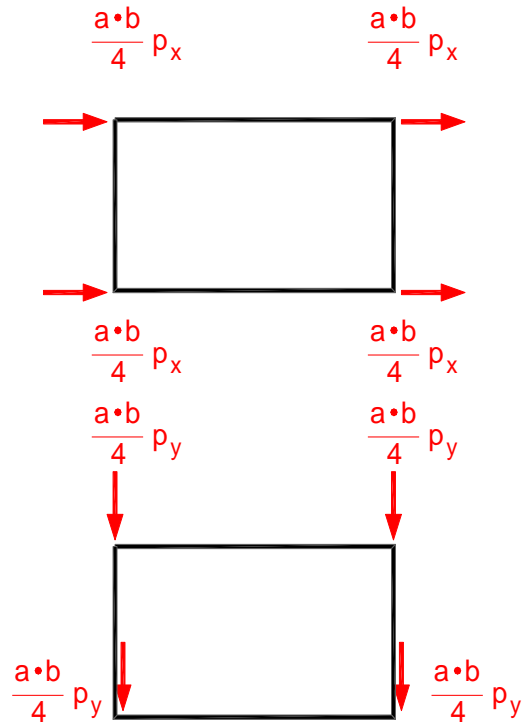
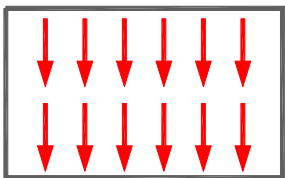
Elementlasten

Konstante Flächenlasten

Flächenlast p_x



Flächenlast p_y



$$\underline{F}_L = \int \underline{N}^T \cdot \underline{p} \, dx \, dy$$

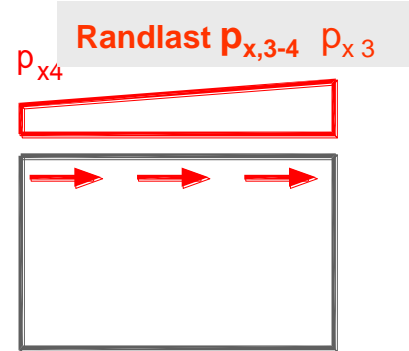
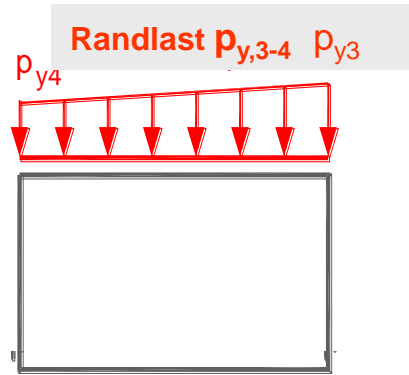
$$\begin{bmatrix} F_{Lx1} \\ F_{Ly1} \\ F_{Lx2} \\ F_{Ly2} \\ F_{Lx3} \\ F_{Ly3} \\ F_{Lx4} \\ F_{Ly4} \end{bmatrix} = \frac{a \cdot b}{4} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

Rechteckelement für Scheiben

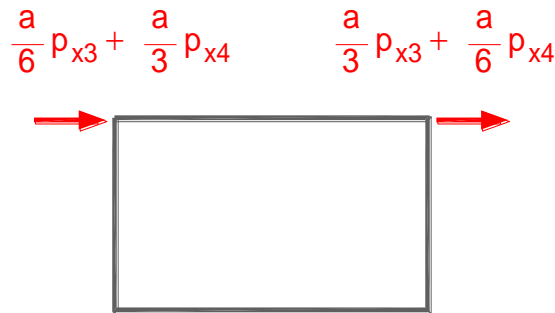
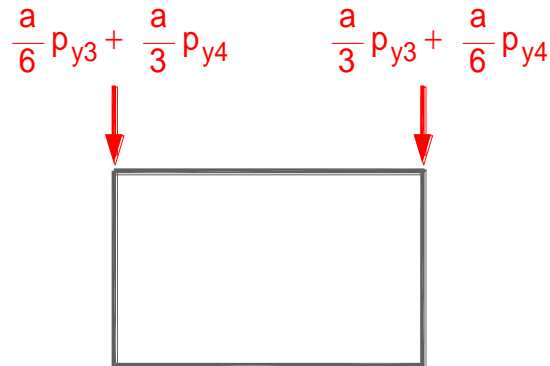
Elementlasten

Linienlasten

Elementlast



Äquivalente Knotenkräfte

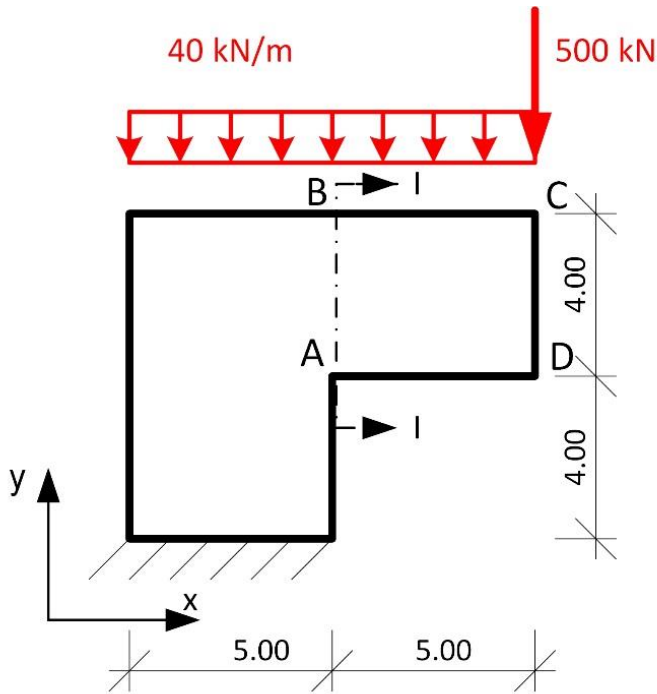


Beispiel

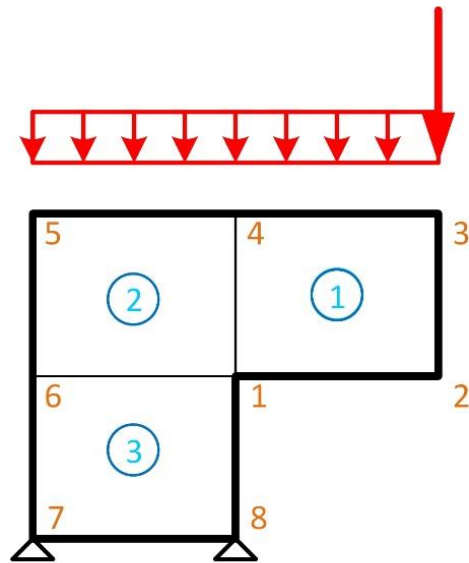
Belastung des oberen Randes des elements durch in x- und y-Richtung linear veränderliche Linienlasten.

Rechteckelement für Scheiben

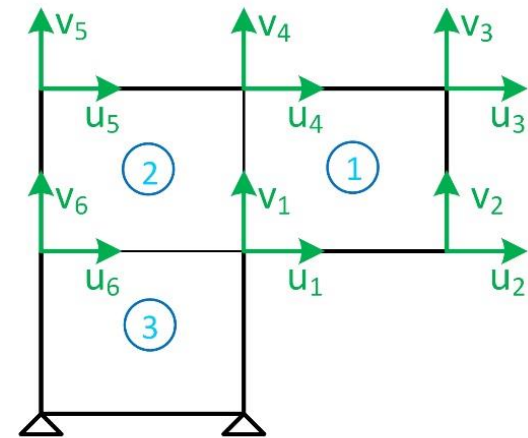
Beispiel: Auskragende Wandscheibe



Tragwerksmodell



FE-Modell (sehr grob)



Steifigkeitsmatrix

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe

Elementsteifigkeitsmatrix

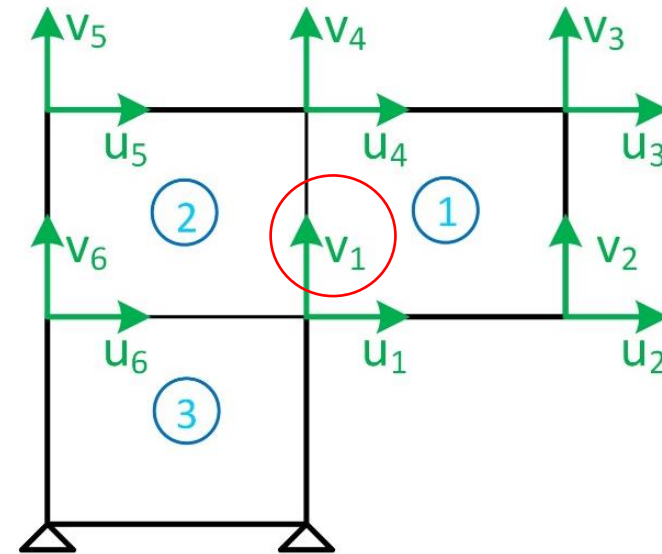
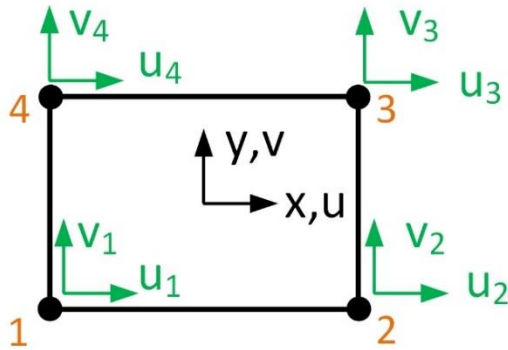
$a = 5 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $t = 0.4 \text{ m}$, $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ und $\mu = 0.2$:

$$\underline{K}^{(e)} = 1.042 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 5.2 & 1.8 & -2.2 & -0.6 & -2.6 & -1.8 & -0.4 & 0.6 \\ 1.8 & 6.28 & 0.6 & 1.22 & -1.8 & -3.14 & -0.6 & -4.36 \\ -2.2 & 0.6 & 5.2 & -1.8 & -0.4 & -0.6 & -2.6 & 1.8 \\ -0.6 & 1.22 & -1.8 & 6.28 & 0.6 & -4.36 & 1.8 & -3.14 \\ -2.6 & -1.8 & -0.4 & 0.6 & 5.2 & 1.8 & -2.2 & -0.6 \\ -1.8 & -3.14 & -0.6 & -4.36 & 1.8 & 6.28 & 0.6 & 1.22 \\ -0.4 & -0.6 & -2.6 & 1.8 & -2.2 & 0.6 & 5.2 & -1.8 \\ 0.6 & -4.36 & 1.8 & -3.14 & -0.6 & 1.22 & -1.8 & 6.28 \end{bmatrix}$$

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe

Systemsteifigkeitsmatrix



Zusammenbau der Steifigkeitsmatrix (Beispiel)

$$k_{2,2}^{(ges)} = k_{2,2}^{(Element1)} + k_{4,4}^{(Element2)} + k_{6,6}^{(Element3)} = 1.042 \cdot 10^6 \cdot (6.28 + 6.28 + 6.28) = 1.042 \cdot 10^6 \cdot 18.84$$

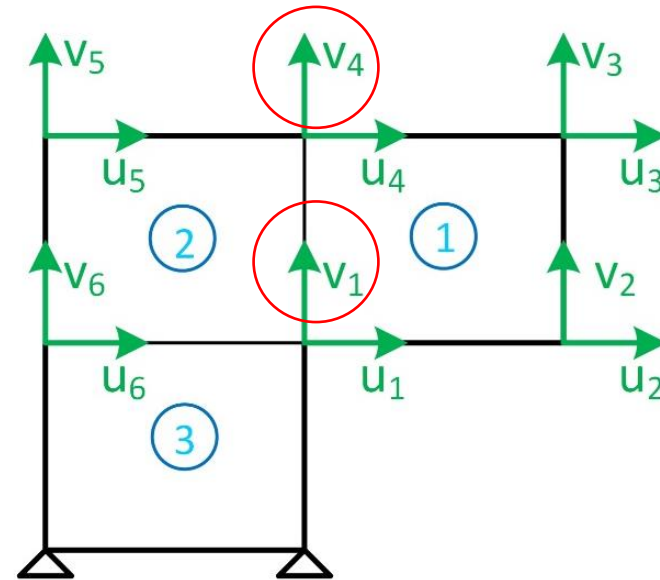
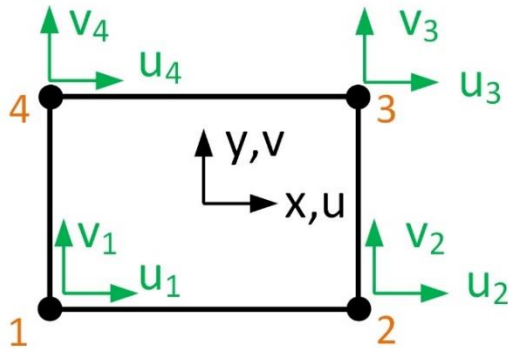
Elemente der Steifigkeitsmatrix

Steifigkeitsmatrix

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe

Systemsteifigkeitsmatrix



Zusammenbau der Steifigkeitsmatrix (Beispiel)

$$k_{2,8}^{(\text{ges})} = k_{2,8}^{(\text{Element 1})} + k_{4,6}^{(\text{Element 2})} = 1.042 \cdot 10^6 \cdot (-4.36 + (-4.36)) = 1.042 \cdot 10^6 \cdot (-8.72)$$

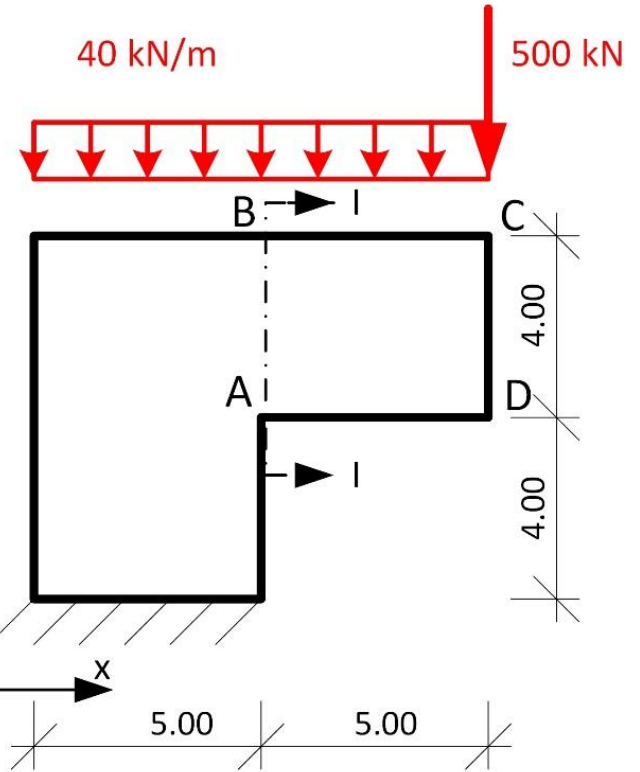
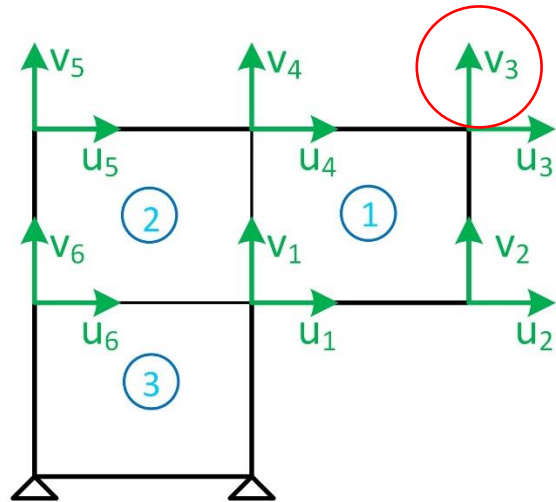
Elemente der Steifigkeitsmatrix

Steifigkeitsmatrix

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe

Systemsteifigkeitsmatrix



Ermittlung des Lastvektors,

Beispiel: Freiheitsgrad v_3

$$F_{y,3} = \frac{q \cdot l}{2} + F = -\frac{40 \cdot 5}{2} - 500 = -600 \text{ kN}$$

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe

Systemsteifigkeitsmatrix

$$1.042 \cdot 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 15.6 & 1.8 & -2.2 & -0.6 & -2.6 & -1.8 & -0.8 & 0 & -2.6 & 1.8 & -4.4 & 0 \\ 1.8 & 18.84 & 0.6 & 1.22 & -1.8 & -3.14 & 0 & -8.72 & 1.8 & -3.14 & 0 & 2.44 \\ -2.2 & 0.6 & 5.2 & -1.8 & -0.4 & -0.6 & -2.6 & 1.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 1.22 & -1.8 & 6.28 & 0.6 & -4.36 & 1.8 & -3.14 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.6 & -1.8 & -0.4 & 0.6 & 5.2 & 1.8 & -2.2 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.8 & -3.14 & -0.6 & -4.36 & 1.8 & 6.28 & 0.6 & 1.22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0 & -2.6 & 1.8 & -2.2 & 0.6 & 10.4 & 0 & -2.2 & -0.6 & -2.6 & -1.8 \\ 0 & -8.72 & 1.8 & -3.14 & -0.6 & 1.22 & 0 & 12.56 & 0.6 & 1.22 & -1.8 & -3.14 \\ -2.6 & 1.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.2 & 0.6 & 5.2 & -1.8 & -0.4 & -0.6 \\ 1.8 & -3.14 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 1.22 & -1.8 & 6.28 & 0.6 & -4.36 \\ -4.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.6 & 1.8 & -0.4 & 0.6 & 10.4 & 0 \\ 0 & 2.44 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.8 & -3.14 & -0.6 & -4.36 & 0 & 12.56 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -600 \\ 0 \\ -200 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rechteckelement für Scheiben

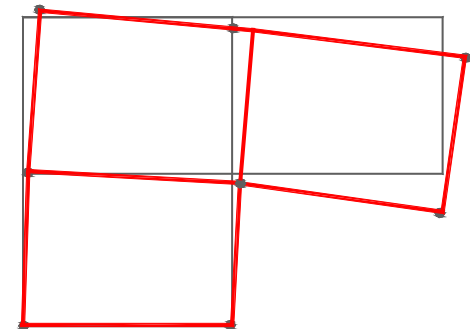
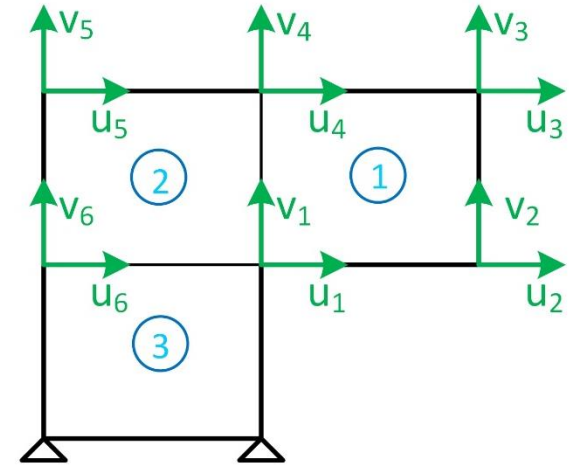
Beispiel: Auskragende Wandscheibe

Verschiebungen

$$\underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{F}$$



$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.204 \\ -0.344 \\ 0.080 \\ -1.613 \\ 1.088 \\ -1.635 \\ 0.936 \\ -0.429 \\ 0.818 \\ 0.302 \\ 0.260 \\ 0.237 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{m}$$



Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe

Elementspannungen

Elementspannungen werden aus den Knotenverschiebungen ermittelt.

Beispiel: Element 1, Punkt 3 (lokale Koordinaten $x=2.5$, $y=2$ mit $a=5$, $b=4$):

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0.25 & 0.2 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D} = 3.125 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0.204 \\ -0.344 \\ 0.08 \\ -1.613 \\ 1.088 \\ -1.635 \\ 0.936 \\ -0.429 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}^{(e)}$$



$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 915.3 \\ 18.1 \\ 137.5 \end{pmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

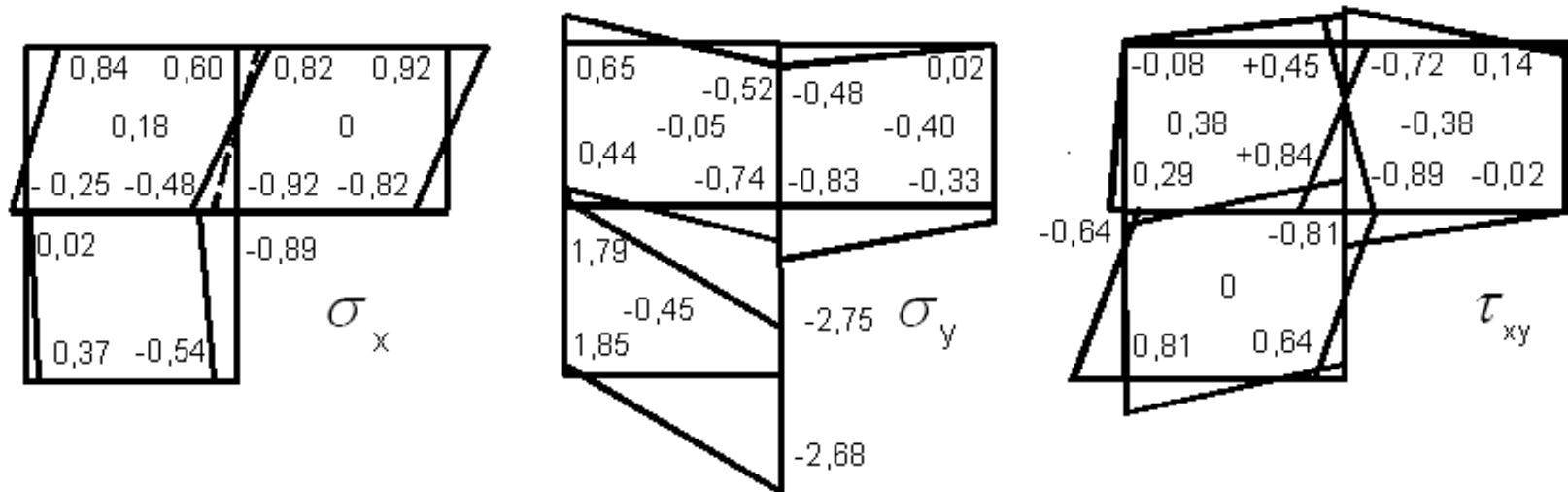
Auskragende Wandscheibe

Dehnungen

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe

Elementspannungen

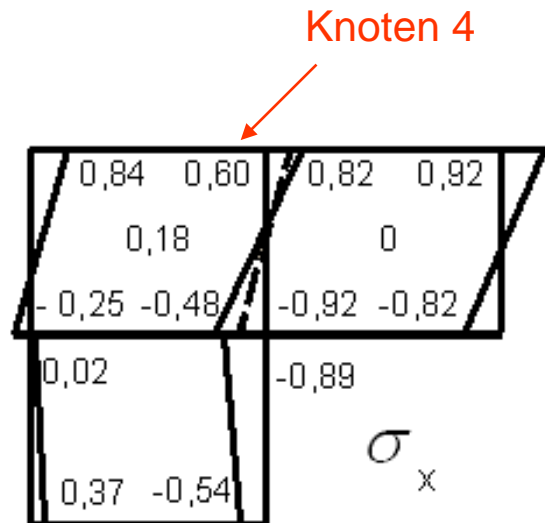


[MN/m²]

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe

Knotenspannungen



Knotenspannungen werden durch Mittelung der Elementspannungen der mit dem Knoten verbundenen Elemente berechnet.

Beispiel: σ_x am Knoten 4

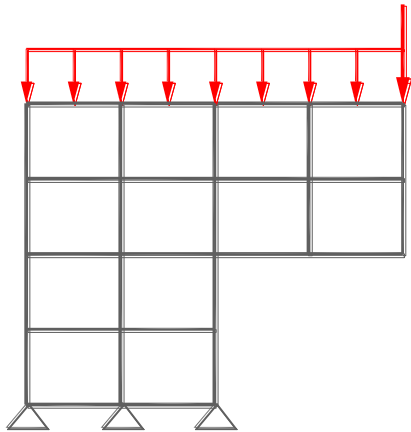
$$(0,60 + 0,82)/2 = 0.71 \text{ MN/m}^2$$

[MN/m²]

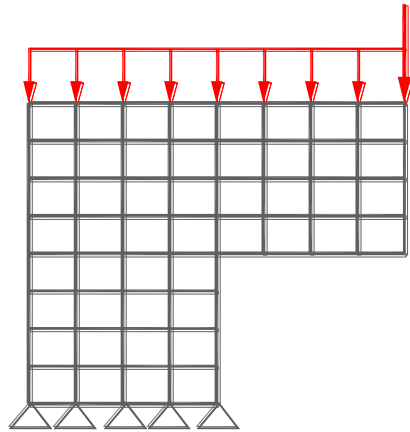
Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe

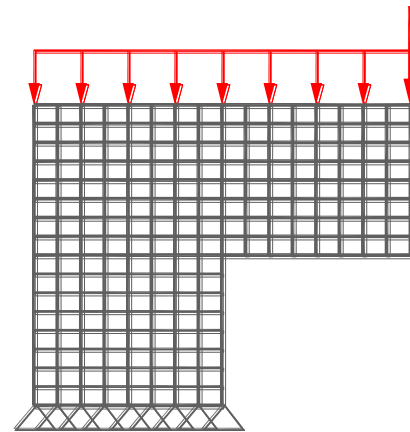
Berechnung mit verschiedenen Elementnetzen



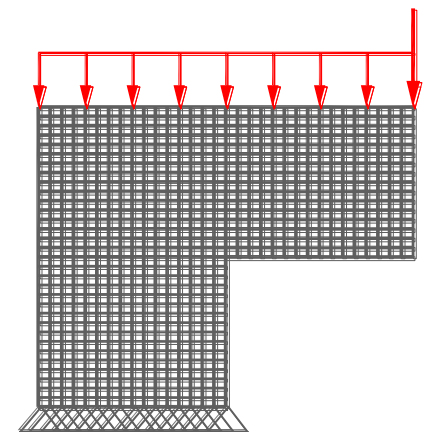
FE-Modell 2 (grob)



FE-Modell 3 (grob-mittel)



FE model 4 (mittel-fein)



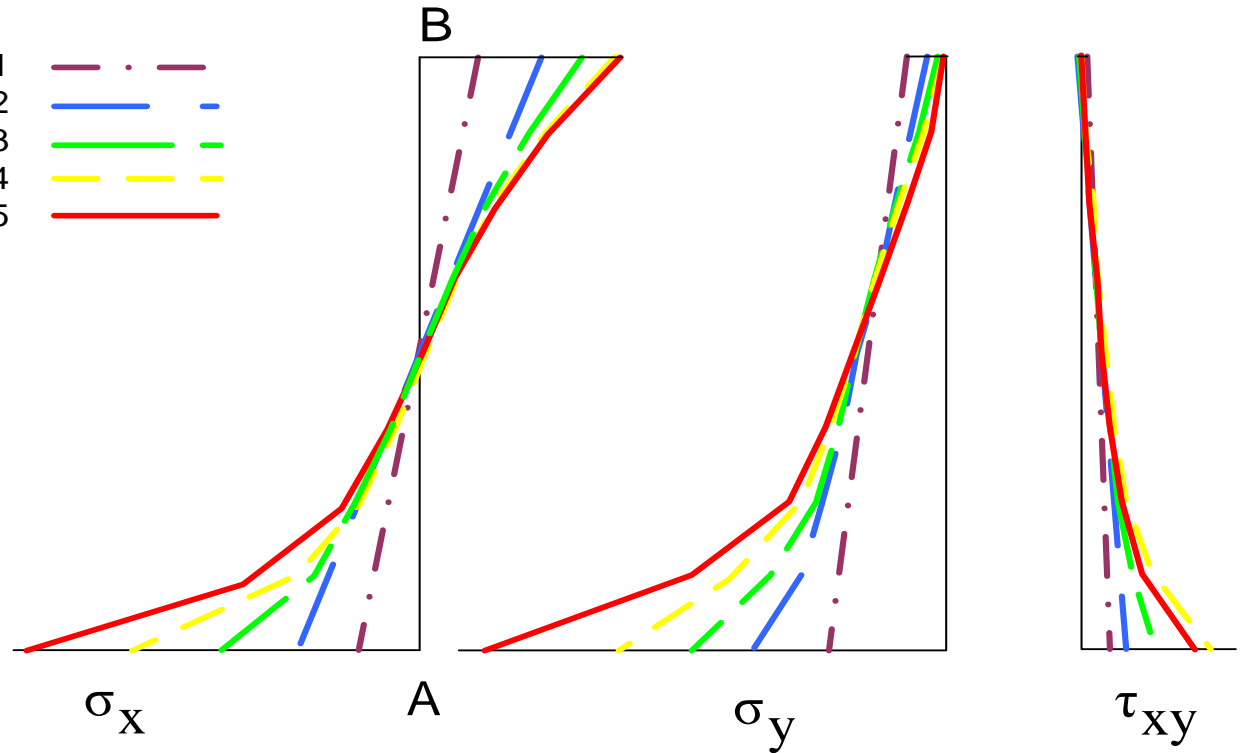
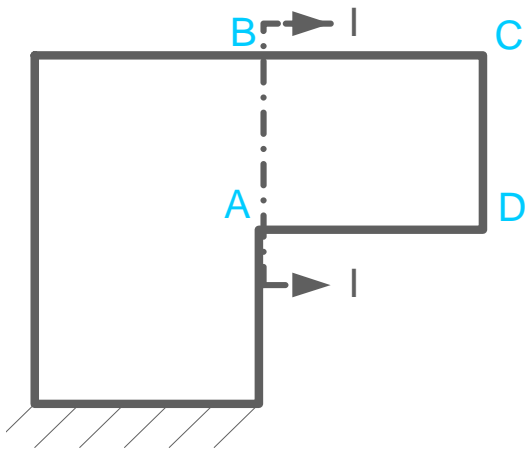
FE model 5 (sehr fein)

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe

Stresses in section I - I [MN/m²]

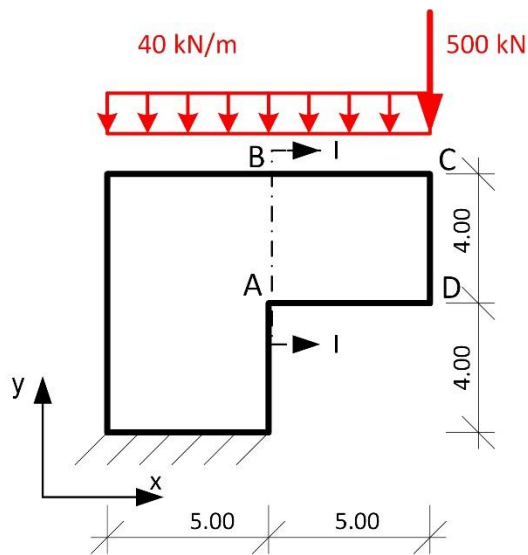
- model 1 - · -
- model 2 - - -
- model 3 - - -
- model 4 - - -
- model 5 - - -



Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe

Knotenspannungen

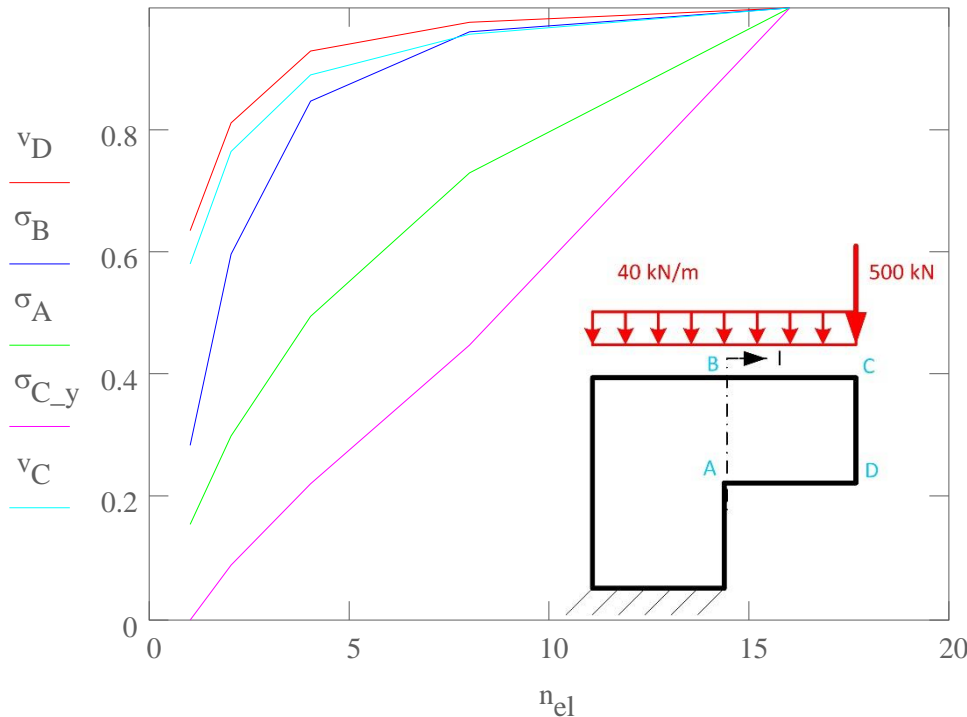


* Spannungen in [MN/m²],
Verschiebungen in [mm],
Längen in [m]

FE- Modell*		1	2	3	4	5
FE- Größe		5.000/	2.500/	1.250/	0.625/	0.3125/
e_x / e_y [m]		4.000	2.000	1.000	0.500	0.250
Punkt A	σ_x	-0.761	-1.458	-2.414	-3.560	-5.041
	σ_y	-1.440	-2.178	-3.134	-4.310	-5.847
	τ_{xy}	0.289	0.508	0.996	1.652	2.483
Punkt B	σ_x	0.707	1.490	2.117	2.397	2.494
	σ_y	-0.502	-0.320	-0.106	-0.063	-0.069
	τ_{xy}	0.135	-0.022	-0.009	0.000	0.002
Punkt C	σ_x	0.915	0.639	0.412	0.605	1.190
	σ_y	0.018	-0.980	-2.507	-5.068	-10.043
	τ_{xy}	-0.137	0.345	0.666	1.228	2.422
	v_C	-1.64	-2.16	-2.50	-2.69	-2.80
	v_D	-1,61	-2,06	-2,35	-2,48	-2,53

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe



Konvergenzverhalten

Referenzwerte (für Bezugswert „1“)
(Lösungen von Netz 5):

$$\sigma_{A-x} = 5.041 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{B-x} = 2.494 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{C-y} = 10.043 \text{ MN/m}^2$$

$$v_D = 2.53 \text{ mm}$$

$$v_C = 2.80 \text{ mm}$$

Konvergenz: v_{D-y} , v_{C-y} , σ_{B-x}

Divergenz: σ_{C-y} , σ_{A-x}

Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe

Schlussfolgerungen

- Die Zugspannung σ_x in Punkt B konvergiert zu einem Wert von 2.5 MN/m².
- Eine ausreichende Genauigkeit im Schnitt I - I erhält man mit mindestens 6-8 Elementen über die Länge des Schnitts.
- An einzelnen Punkten wie z.B. im Punkt A (einspringende Ecke), Punkt C (Punktlast) steigen die Spannungen bei Netzverfeinerung kontinuierlich an, d.h. sie konvergieren **nicht!** Dies weist auf eine Singularität im Tragwerksmodell hin. Die Verschiebung unter der Punktlast weist ebenfalls eine Singularität auf (v_3 in Punkt C).
- Die an den Knotenpunkten durch Mittelung der Elementspannungen erhaltenen Werte weisen eine höhere Genauigkeit als die einzelnen Elementspannungen auf.

Ende

Einführung

Stabtragwerke

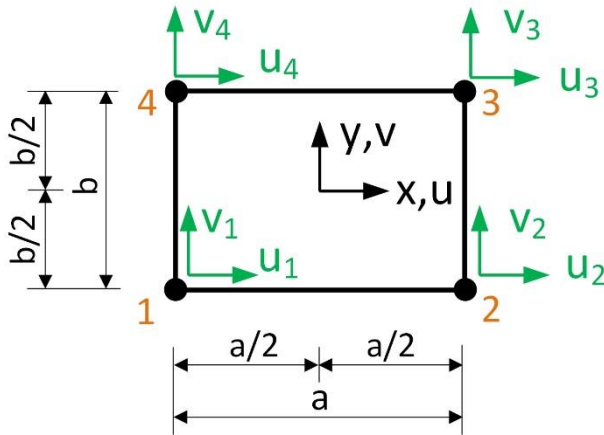
3 Flächentragwerke

Modellbildung

Rechteckelement für Scheiben

Steifigkeitsmatrix des rechteckförmigen Scheibenelements

mit



$$\begin{aligned}
 k_{11} &= k_{33} = k_{55} = k_{77} &= 4b/a + 2(1-\mu)a/b \\
 k_{22} &= k_{44} = k_{66} = k_{88} &= 4a/b + 2(1-\mu)b/a \\
 k_{12} &= k_{47} = k_{38} = k_{56} &= 3/2(1+\mu) \\
 k_{13} &= k_{57} &= -4b/a + (1-\mu)a/b \\
 k_{14} &= k_{27} = k_{58} = k_{36} &= -3/2(1-3\mu) \\
 k_{15} &= k_{37} &= -2b/a - (1-\mu)a/b \\
 k_{16} &= k_{25} = k_{78} = k_{34} &= -3/2(1+\mu) \\
 k_{17} &= k_{35} &= 2b/a - 2(1-\mu)a/b \\
 k_{18} &= k_{23} = k_{67} = k_{45} &= 3/2(1-3\mu) \\
 k_{24} &= k_{68} &= 2a/b - 2(1-\mu)b/a \\
 k_{26} &= k_{48} &= -2a/b - (1-\mu)b/a \\
 k_{28} &= k_{46} &= -4a/b + (1-\mu)b/a
 \end{aligned}$$



Rechteckelement für Scheiben

Ansatzfunktionen der Verschiebungen

Ansatzfunktionen

$$N_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2a}x - \frac{1}{2b}y + \frac{1}{ab}xy$$

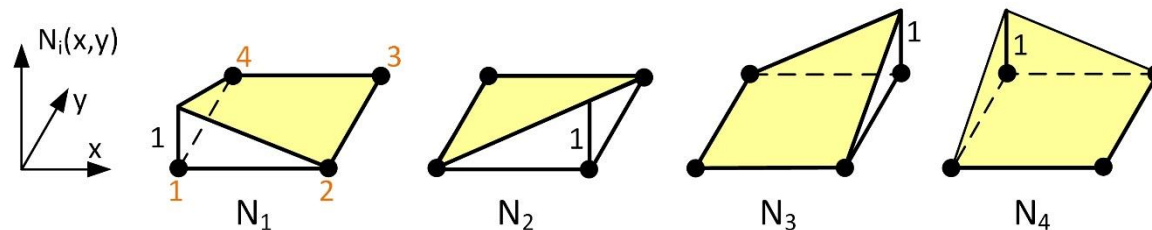
$$N_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2a}x - \frac{1}{2b}y - \frac{1}{ab}xy$$

$$N_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2a}x + \frac{1}{2b}y + \frac{1}{ab}xy$$

$$N_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2a}x + \frac{1}{2b}y - \frac{1}{ab}xy$$

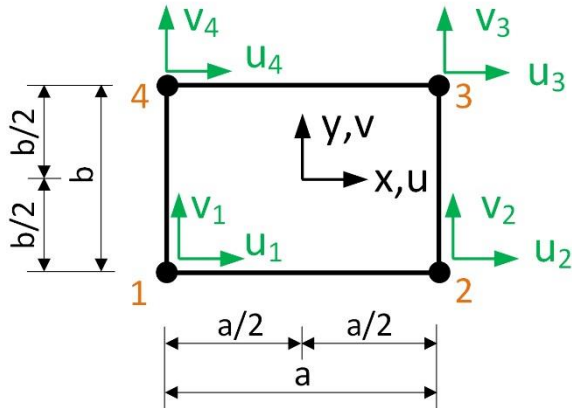
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{u}_e$$



Rechteckelement für Scheiben

Elementspannungen



$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}_e$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\mu^2) \cdot 2 \cdot a \cdot b} \cdot [(2 \cdot y - b) \cdot (u_1 - u_2) + (2 \cdot y + b) \cdot (u_3 - u_4) + \mu \cdot ((2 \cdot x - a) \cdot (v_1 - v_4) + (2 \cdot x + a) \cdot (-v_2 + v_3))]$$

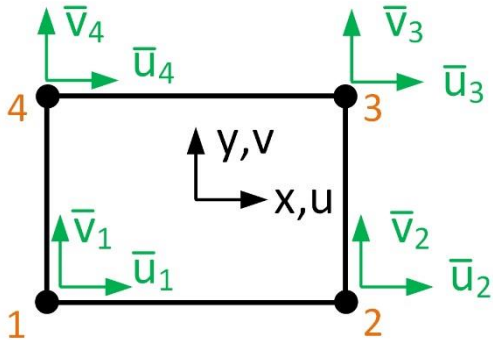
$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\mu^2) \cdot 2 \cdot a \cdot b} \cdot [\mu \cdot ((2 \cdot y - b) \cdot (u_1 - u_2) + (2 \cdot y + b) \cdot (u_3 - u_4)) + (2 \cdot x - a) \cdot (v_1 - v_4) + (2 \cdot x + a) \cdot (-v_2 + v_3)]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{4 \cdot (1 + \mu) \cdot a \cdot b} \cdot [(2 \cdot y - b) \cdot (v_1 - v_2) + (2 \cdot y + b) \cdot (v_3 - v_4) + (2 \cdot x - a) \cdot (u_1 - u_4) + (2 \cdot x + a) \cdot (u_3 - u_2)]$$

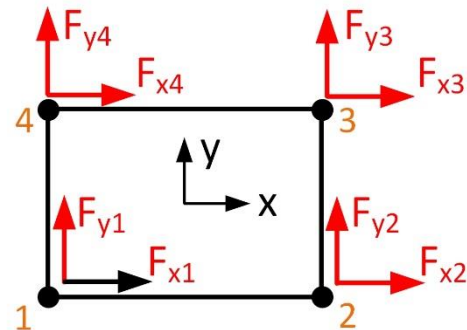


Rechteckelement für Scheiben

Prinzip der virtuellen Verschiebungen



Virtuelle Verschiebungen



Reale Kräfte

Äußere Arbeit

der Elementknotenkräfte:

$$\bar{W}_a = \bar{\underline{u}}_e^T \cdot \underline{F}_e$$

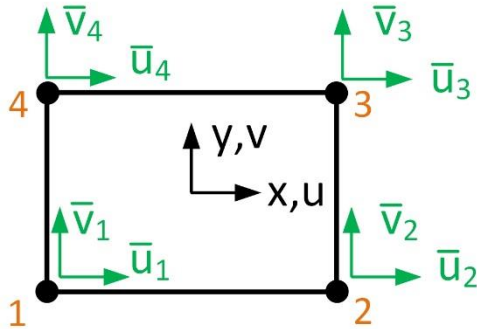
$$\bar{W}_a = [\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{u}_3 \quad \bar{v}_3 \quad \bar{u}_4 \quad \bar{v}_4] \cdot$$

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}$$



Rechteckelement für Scheiben

Prinzip der virtuellen Verschiebungen



$$\overline{W}_a = \underline{\bar{u}}_e^T \cdot \underline{F}_e \quad \overline{W}_i = \underline{\bar{u}}_e^T \cdot t \int \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \, dx \, dy \cdot \underline{u}_e$$

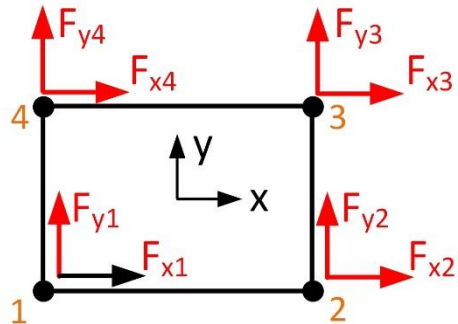
$$\overline{W}_i = \overline{W}_a$$

Virtuelle Verschiebungen

$$\underline{\bar{u}}_e^T \cdot t \int \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \, dx \, dy \cdot \underline{u}_e = \underline{\bar{u}}_e^T \cdot \underline{F}_e$$

Gilt für alle virtuelle Verschiebungszustände $\underline{\bar{u}}_e$

$$\rightarrow t \cdot \int \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \, dx \, dy \cdot \underline{u}_e = \underline{F}_e$$



Reale Kräfte

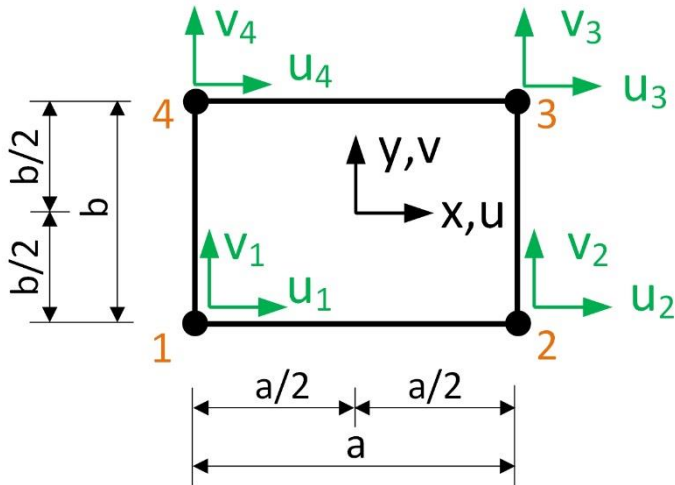
$$\underline{K}^{(e)} \cdot \underline{u}_e = \underline{F}_e$$

$$\underline{K}^{(e)} = t \cdot \int \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \, dx \, dy$$



Rechteckelement für Scheiben

Elementverschiebungen



$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{u}_e$$

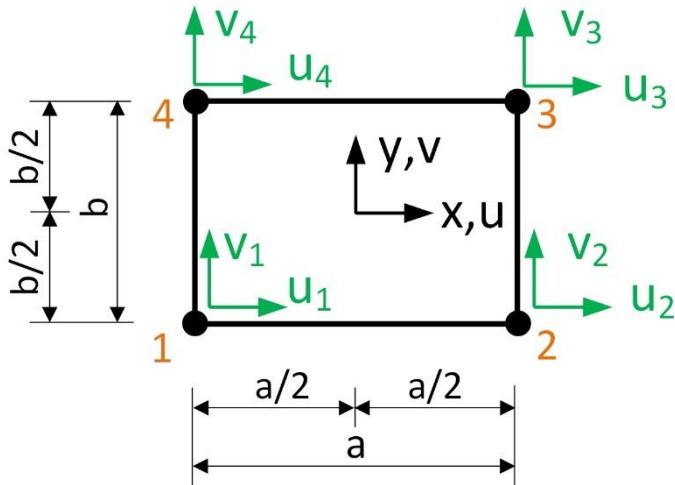
$$u(x, y) = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + x \cdot \frac{1}{2a}(-u_1 + u_2 + u_3 - u_4) + y \frac{1}{2b}(-u_1 - u_2 + u_3 + u_4) + x \cdot y \cdot \frac{1}{ab}(u_1 - u_2 + u_3 - u_4)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + x \cdot \frac{1}{2a}(-v_1 + v_2 + v_3 - v_4) + y \frac{1}{2b}(-v_1 - v_2 + v_3 + v_4) + x \cdot y \cdot \frac{1}{ab}(v_1 - v_2 + v_3 - v_4)$$



Rechteckelement für Scheiben

Elementverschiebungen



$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{u}_e$$

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + x \cdot \frac{1}{2a}(-u_1 + u_2 + u_3 - u_4) + y \cdot \frac{1}{2b}(-u_1 - u_2 + u_3 + u_4) + x \cdot y \cdot \frac{1}{ab}(u_1 - u_2 + u_3 - u_4)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + x \cdot \frac{1}{2a}(-v_1 + v_2 + v_3 - v_4) + y \cdot \frac{1}{2b}(-v_1 - v_2 + v_3 + v_4) + x \cdot y \cdot \frac{1}{ab}(v_1 - v_2 + v_3 - v_4)$$



Rechteckelement für Scheiben

Dehnungen

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

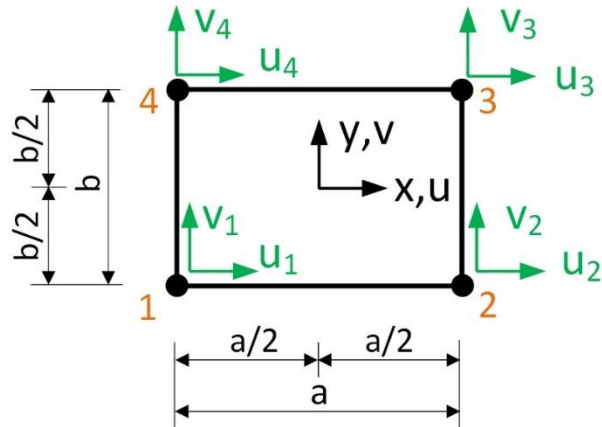
$$\underline{\varepsilon} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{u}_e$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2ab} \begin{bmatrix} 2y-b & 0 & -2y+b & 0 & 2y+b & 0 & -2y-b & 0 \\ 0 & 2x-a & 0 & -2x-a & 0 & 2x+a & 0 & -2x+a \\ 2x-a & 2y-b & -2x-a & -2y+b & 2x+a & 2y+b & -2x+a & -2y-b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$



Rechteckelement für Scheiben

Steifigkeitsmatrix des rechteckförmigen Scheibenelements



$$\frac{E \cdot t}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$$

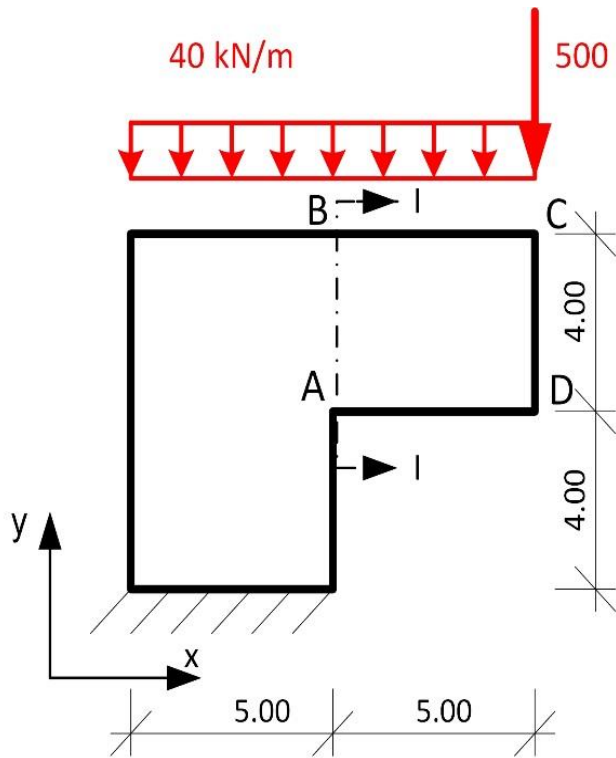
$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}^{(e)} \cdot \underline{u}_e = \underline{F}_e$$

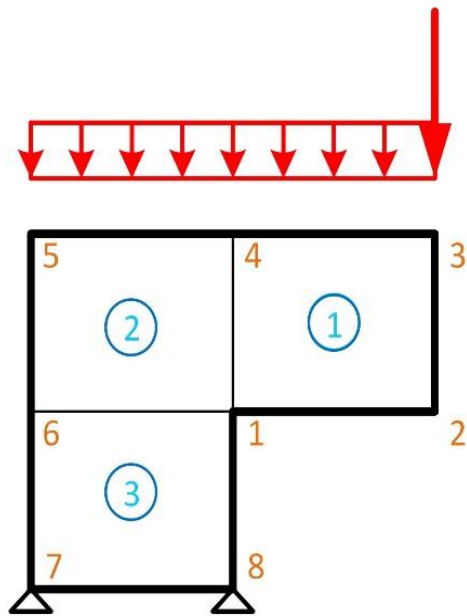


Rechteckelement für Scheiben

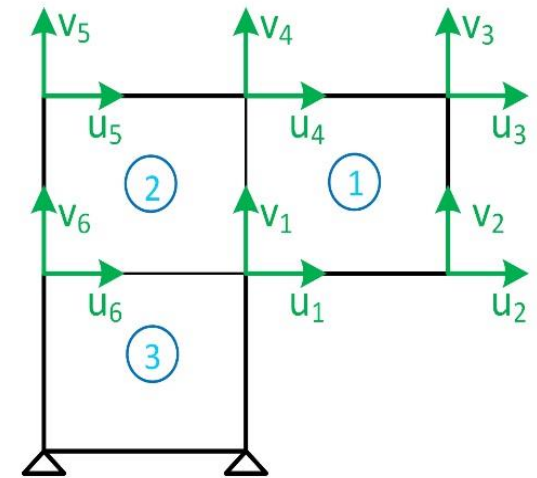
Beispiel: Auskragende Wandscheibe



Tragwerksmodell

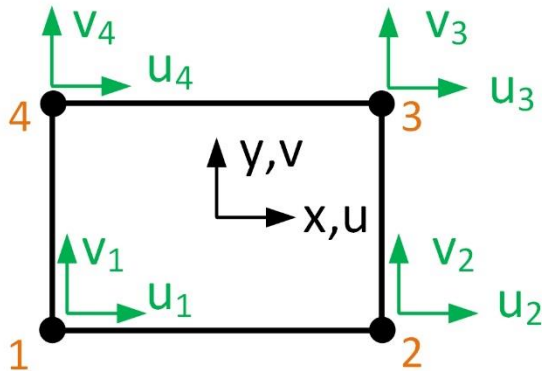


FE-Modell (sehr grob)



Rechteckelement für Scheiben

Ansatzfunktionen der Verschiebungen

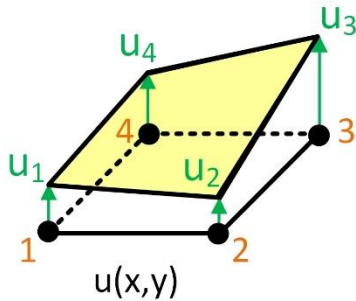
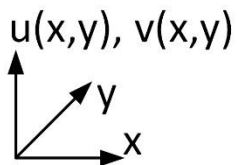


Bilineare Ansatzfunktion der Verschiebungen:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x \cdot y$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 \cdot x + \beta_3 \cdot y + \beta_4 \cdot x \cdot y$$

bilinearer Term



Ansatzfunktion für **u**

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \underline{N}_a \cdot \underline{a}$$



Rechteckelement für Scheiben

Ansatzfunktionen der Verschiebungen

Ansatzfunktionen

$$N_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2a}x - \frac{1}{2b}y + \frac{1}{ab}xy$$

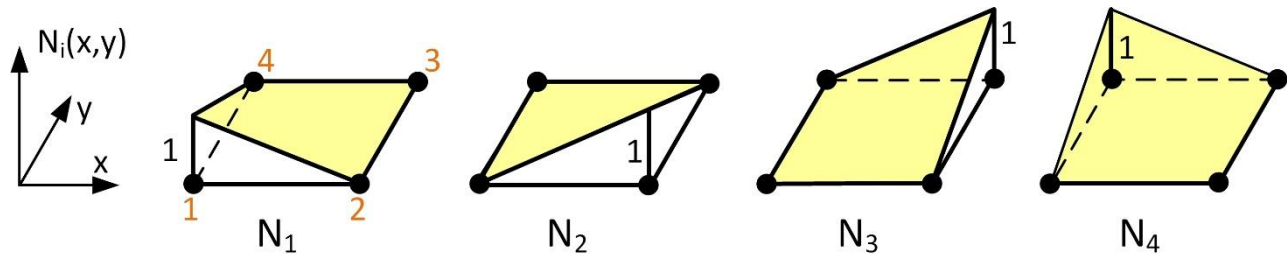
$$N_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2a}x - \frac{1}{2b}y - \frac{1}{ab}xy$$

$$N_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2a}x + \frac{1}{2b}y + \frac{1}{ab}xy$$

$$N_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2a}x + \frac{1}{2b}y - \frac{1}{ab}xy$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{u}_e$$



Rechteckelement für Scheiben

Spannungen

Dehnungsvektor $\underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{u}_e$

Hook'sches Gesetz $\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\varepsilon}$

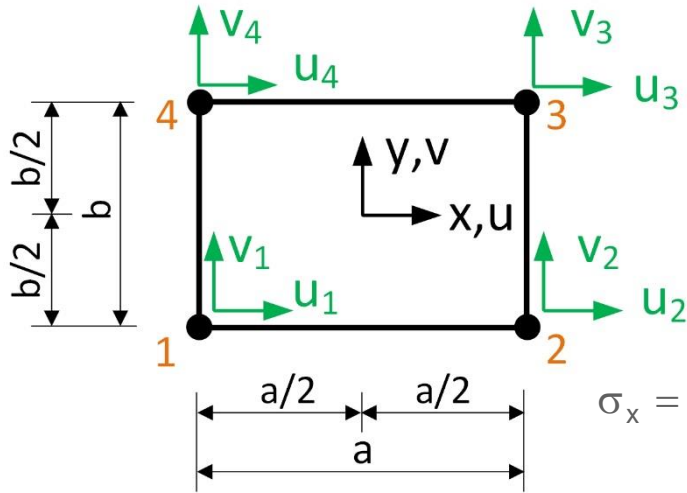
Spannungsvektor $\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}_e$

mit
$$\underline{D} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$$



Rechteckelement für Scheiben

Elementspannungen



$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}_e$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\mu^2) \cdot 2 \cdot a \cdot b} \cdot [(2 \cdot y - b) \cdot (u_1 - u_2) + (2 \cdot y + b) \cdot (u_3 - u_4) + \mu \cdot ((2 \cdot x - a) \cdot (v_1 - v_4) + (2 \cdot x + a) \cdot (-v_2 + v_3))]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\mu^2) \cdot 2 \cdot a \cdot b} \cdot [\mu \cdot ((2 \cdot y - b) \cdot (u_1 - u_2) + (2 \cdot y + b) \cdot (u_3 - u_4)) + (2 \cdot x - a) \cdot (v_1 - v_4) + (2 \cdot x + a) \cdot (-v_2 + v_3)]$$

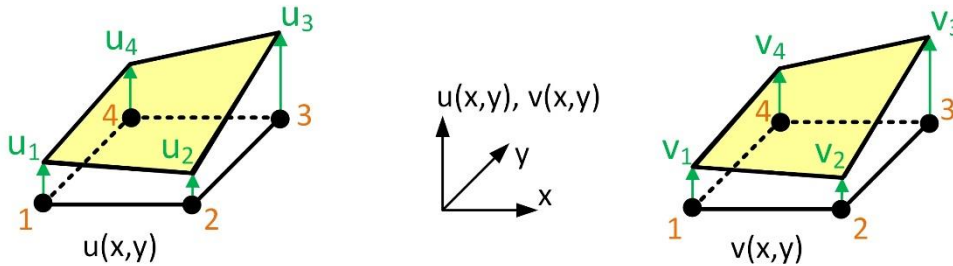
$$\tau_{xy} = \frac{E}{4 \cdot (1 + \mu) \cdot a \cdot b} \cdot [(2 \cdot y - b) \cdot (v_1 - v_2) + (2 \cdot y + b) \cdot (v_3 - v_4) + (2 \cdot x - a) \cdot (u_1 - u_4) + (2 \cdot x + a) \cdot (u_3 - u_2)]$$



Rechteckelement für Scheiben

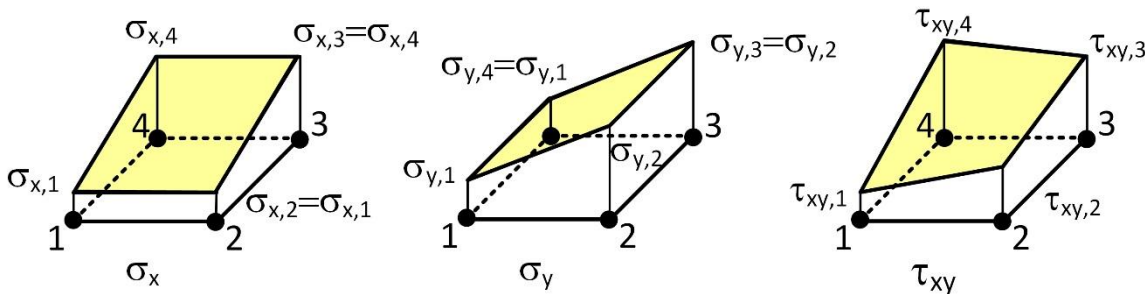
Ansatzfunktionen des rechteckförmigen Scheibenelements und daraus hergeleitete Spannungen

Ansatzfunktionen



bilineare Funktionen

Aus den Ansatzfunktionen abgeleitete Spannungen



für $\mu = 0$:

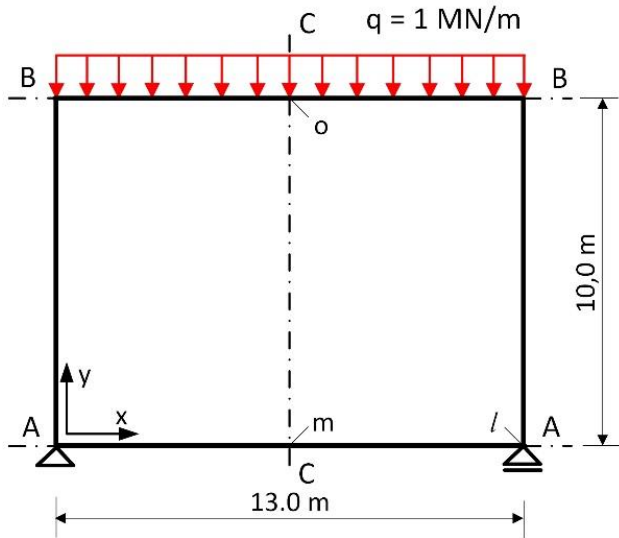
σ_x konstant in x-Richtung
linear in y-Richtung

σ_y konstant in y-Richtung
linear in x-Richtung



Rechteckelement für Scheiben

Beispiel: Auskragende Wandscheibe



$$E = 3,0 \cdot 10^7 \text{ [kN/m}^2\text{]}$$

$$\mu = 0,0$$

$$t = 0,5 \text{ [m]}$$

Vergleich mit der Theorie des Biegebalkens

$$M_{\max} = ql^2/8 = 13,00^2/8 = 21,13 \text{ MNm}$$

$$W = t h^2/6 = 0,5 \cdot 10^2 / 6 = 8,33 \text{ m}^3$$

$$\sigma_{o,u} = + - M / W = + - 21,125 / 8,33 = 2,50 \text{ MN/m}^2$$

Bei dem Spannungswert von $+/- 2,5 \text{ MN/m}^2$ der Biegebalkentheorie wird ein linearer Spannungsverlauf vorausgesetzt.

