Übertragungsmatrizenverfahren

Matrizen und Definitionen ORIGIN := 1

ABSCHNITT

$$A(l,EI) := \begin{pmatrix} 1 & l & -\frac{l^2}{2\cdot EI} & -\frac{l^3}{6\cdot EI} \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EI} & -\frac{l^2}{2\cdot EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_q(q_l,q_r,l,EI) := \begin{bmatrix} \frac{(4\cdot q_l + q_r)\cdot l^4}{120\cdot EI} \\ \frac{(3\cdot q_l + q_r)\cdot l^3}{24\cdot EI} \\ \frac{-(2\cdot q_l + q_r)\cdot l^2}{6} \\ \frac{-(q_l + q_r)\cdot l}{2} \end{bmatrix}$$

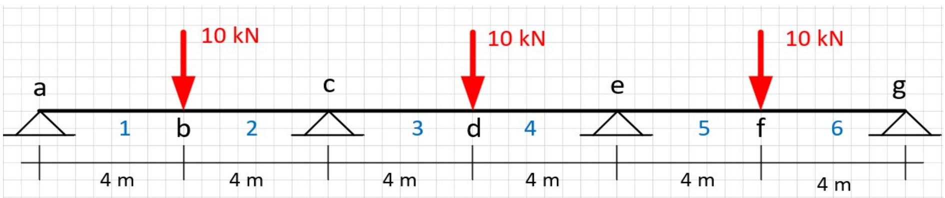
PUNKT

$$P(k_w,k_\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_\phi & 1 & 0 \\ k_w & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_F(F,M) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \\ -F \end{pmatrix}$$

ANFANGSVEKTOREN

$$Z_{frei} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z_{gelenk} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Z_{einspann} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel



$l_1 := 4$ $l_2 := 4$ $l_3 := 4$ $l_4 := 4$ $l_5 := 4$ $l_6 := 4$ $EI := 1$

$F_b := 10$ $F_d := 10$ $F_f := 10$

Übertragungsmatrizen:

Punkt a: Einspannung am Trägeranfang

Abschnitt 1: $A_1 := A(l_1, EI) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & -10.667 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_1 := L_q(0, 0, l_1, EI) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt b $A_b := P(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_b := P_F(F_b, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

Abschnitt 2: $A_2 := A(l_2, EI) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & -10.667 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2 := L_q(0, 0, l_2, EI) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt c: Gelenkiges Lager

Abschnitt 3: $A_3 := A(l_3, EI) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & -10.667 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_3 := L_q(0, 0, l_3, EI) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt d $A_d := P(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_d := P_F(F_d, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

Abschnitt 4: $A_4 := A(l_4, EI) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & -10.667 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_4 := L_q(0, 0, l_4, EI) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt e: Gelenkiges Lager

Abschnitt 5: $A_5 := A(l_5, EI) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & -10.667 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_5 := L_q(0, 0, l_5, EI) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt f $A_f := P(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_f := P_F(F_f, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

Abschnitt 6: $A_6 := A(l_6, EI) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & -10.667 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_6 := L_q(0, 0, l_6, EI) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt g: Gelenkiges Lager am Trägerende

Erste Übertragung mit Unbekannten im Zustandsvektor - beginnend mit dem ersten DLT-Feld

Anfangsvektor mit 2 Unbekannten (M_a, Q_a)

$$Z_a := Z_{gelenk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Übertragung Abschnitt 1

$$Z_{b\_li} := A_1 \cdot Z_a = \begin{pmatrix} 4 & -10.667 \\ 1 & -8 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{b\_li} := L_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Übertragung Punkt b

$$Z_{b\_re} := A_b \cdot Z_{b\_li} = \begin{pmatrix} 4 & -10.667 \\ 1 & -8 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{b\_re} := A_b \cdot L_{b\_li} + L_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Übertragung Abschnitt 2

$$Z_{c\_li} := A_2 \cdot Z_{b\_re} = \begin{pmatrix} 8 & -85.333 \\ 1 & -32 \\ 0 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{c\_li} := A_2 \cdot L_{b\_re} + L_2 = \begin{pmatrix} 106.667 \\ 80 \\ -40 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Punkt c: - Ersatzfeder-Matrix für linken Trägerteil

$$Z_{c\_oben} := \mathrm{submatrix}(Z_{c\_li}, 1, 2, 1, 2) = \begin{pmatrix} 8 & -85.333 \\ 1 & -32 \end{pmatrix} \qquad L_{c\_oben} := \mathrm{submatrix}(L_{c\_li}, 1, 2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 106.667 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$Z_{c\_unten} := \mathrm{submatrix}(Z_{c\_li}, 3, 4, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{c\_unten} := \mathrm{submatrix}(L_{c\_li}, 3, 4, 1, 1) = \begin{pmatrix} -40 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$K_{c\_s} := Z_{c\_unten} \cdot Z_{c\_oben}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.047 & -0.375 \\ 5.859 \times 10^{-3} & -0.047 \end{pmatrix} \qquad L_{c\_s} := L_{c\_unten} - K_{c\_s} \cdot L_{c\_oben} = \begin{pmatrix} -15 \\ -6.875 \end{pmatrix}$$

$$A_c := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{c\_s_{1,1}} & K_{c\_s_{1,2}} & 1 & 0 \\ K_{c\_s_{2,1}} & K_{c\_s_{2,2}} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.047 & -0.375 & 1 & 0 \\ 5.859 \times 10^{-3} & -0.047 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_c := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{c\_s_1} \\ L_{c\_s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \\ -6.875 \end{pmatrix}$$

Die Federungsmatrix Ac und der Lastvektor Lc geben die Steifigkeit des linken Trägerteils, d.h. hier des Feldes a-c wieder.

Punkt c: - Neues Auflager mit neuen Unbekannten (phi_c, Q_c) für das nächste DLT-Feld

$$Z_c := Z_{gelenk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Unbekannten sind ab jetzt für das Feld c-e phi_c und Q_c.

Punkt c - Übertragung des Anfangsvektors über die Feder, die das linke DLT-Feld ersetzt:

$$Z_{c\_re} := A_c \cdot Z_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -0.375 & 0 \\ -0.047 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{c\_re} := L_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \\ -6.875 \end{pmatrix}$$

Übertragung Abschnitt 3

$$Z_{d\_li} := A_3 \cdot Z_{c\_re} = \begin{pmatrix} 7.5 & -10.667 \\ 2.875 & -8 \\ -0.562 & 4 \\ -0.047 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{d\_li} := A_3 \cdot L_{c\_re} + L_3 = \begin{pmatrix} 193.333 \\ 115 \\ -42.5 \\ -6.875 \end{pmatrix}$$

Übertragung Punkt d

$$Z_{d\_re} := A_d \cdot Z_{d\_li} = \begin{pmatrix} 7.5 & -10.667 \\ 2.875 & -8 \\ -0.562 & 4 \\ -0.047 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{d\_re} := A_d \cdot L_{d\_li} + L_d = \begin{pmatrix} 193.333 \\ 115 \\ -42.5 \\ -16.875 \end{pmatrix}$$

Übertragung Abschnitt 4

$$Z_{e\_li} := A_4 \cdot Z_{d\_re} = \begin{pmatrix} 24 & -85.333 \\ 5.5 & -32 \\ -0.75 & 8 \\ -0.047 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{e\_li} := A_4 \cdot L_{d\_re} + L_4 = \begin{pmatrix} 1.173 \times 10^3 \\ 420 \\ -110 \\ -16.875 \end{pmatrix}$$

Punkt e: - Ersatzfeder-Matrix für linken Trägerteil

$$Z_{e\_oben} := \mathrm{submatrix}(Z_{e\_li}, 1, 2, 1, 2) = \begin{pmatrix} 24 & -85.333 \\ 5.5 & -32 \end{pmatrix} \qquad L_{e\_oben} := \mathrm{submatrix}(L_{e\_li}, 1, 2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1.173 \times 10^3 \\ 420 \end{pmatrix}$$

$$Z_{e\_unten} := \mathrm{submatrix}(Z_{e\_li}, 3, 4, 1, 2) = \begin{pmatrix} -0.75 & 8 \\ -0.047 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{e\_unten} := \mathrm{submatrix}(L_{e\_li}, 3, 4, 1, 1) = \begin{pmatrix} -110 \\ -16.875 \end{pmatrix}$$

$$K_{e\_s} := Z_{e\_unten} \cdot Z_{e\_oben}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.067 & -0.429 \\ 0.013 & -0.067 \end{pmatrix} \qquad L_{e\_s} := L_{e\_unten} - K_{e\_s} \cdot L_{e\_oben} = \begin{pmatrix} -8.571 \\ -4.464 \end{pmatrix}$$

$$A_e := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ {K_{e\_s}}_{1,1} & {K_{e\_s}}_{1,2} & 1 & 0 \\ {K_{e\_s}}_{2,1} & {K_{e\_s}}_{2,2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.067 & -0.429 & 1 & 0 \\ 0.013 & -0.067 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_e := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ {L_{e\_s}}_1 \\ {L_{e\_s}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.571 \\ -4.464 \end{pmatrix}$$

Die Federungsmatrix Ae und der Lastvektor Le geben die Steifigkeit des linken Trägerteils, d.h. hier des Feldes c-e wieder.

Punkt e: - Neues Auflager mit neuen Unbekannten (phi_e, Q_e) für das nächste DLT-Feld

$$Z_e := Z_{gelenk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Unbekannten sind ab jetzt für das Feld e-g phi_e und Q_e.

Punkt e - Übertragung des Anfangsvektors über die Feder, die das linke DLT-Feld ersetzt:

$$Z_{e\_re} := A_e \cdot Z_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -0.429 & 0 \\ -0.067 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{e\_re} := L_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.571 \\ -4.464 \end{pmatrix}$$

Übertragung Feld 5

$$Z_{f\_li} := A_5 \cdot Z_{e\_re} = \begin{pmatrix} 8.143 & -10.667 \\ 3.25 & -8 \\ -0.696 & 4 \\ -0.067 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{f\_li} := A_3 \cdot L_{e\_re} + L_5 = \begin{pmatrix} 116.19 \\ 70 \\ -26.429 \\ -4.464 \end{pmatrix}$$

Übertragung Punkt f

$$Z_{f\_re} := A_f \cdot Z_{f\_li} = \begin{pmatrix} 8.143 & -10.667 \\ 3.25 & -8 \\ -0.696 & 4 \\ -0.067 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{f\_re} := A_f \cdot L_{f\_li} + L_f = \begin{pmatrix} 116.19 \\ 70 \\ -26.429 \\ -14.464 \end{pmatrix}$$

Übertragung Feld 6

$$Z_{g\_li} := A_6 \cdot Z_{f\_re} = \begin{pmatrix} 27.429 & -85.333 \\ 6.571 & -32 \\ -0.964 & 8 \\ -0.067 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_{g\_li} := A_6 \cdot L_{f\_re} + L_6 = \begin{pmatrix} 761.905 \\ 291.429 \\ -84.286 \\ -14.464 \end{pmatrix}$$

Punkt g: gelenkiges Lager am Trägerende

$$Z_g := Z_{gelenk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Am rechten Rand des DLTs Gleichungssystem aufstellen und lösen

$$XM := \text{erweitern}\left(Z_g, -Z_{g\_li}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -27.429 & 85.333 \\ 1 & 0 & -6.571 & 32 \\ 0 & 0 & 0.964 & -8 \\ 0 & 1 & 0.067 & -1 \end{pmatrix} \qquad X_{vek} := XM^{-1} \cdot L_{g\_li} = \begin{pmatrix} -24 \\ -3.5 \\ 8 \\ 11.5 \end{pmatrix} \qquad X_e := \begin{pmatrix} X_{vek_3} \\ X_{vek_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11.5 \end{pmatrix}$$

Zweite Übertragung mit bekannten Größen im Zustandsvektor - beginnend mit dem letzten DLT-Feld

DLT-Feld e-g

Punkt e: - Auflager mit Unbekannten phi_e, Q_e

$$Z_{e\_e} := Z_{gelenk} \cdot X_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 11.5 \end{pmatrix} \qquad u_{e\_re} := \begin{pmatrix} Z_{e\_e_1} \\ Z_{e\_e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Punkt c - Übertragung des Anfangsvektors über die Feder, die den linken Trägerteil ersetzt:

$$Z_{e\_e\_re} := A_e \cdot Z_{e\_e} + L_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -12 \\ 6.5 \end{pmatrix}$$

Dies sind die nun bekannten Zustandsgrößen am Anfang des Feldes e-g

Übertragung Abschnitt 5

$$Z_{e\_f\_li} := A_5 \cdot Z_{e\_e\_re} + L_5 = \begin{pmatrix} 58.667 \\ 4 \\ 14 \\ 6.5 \end{pmatrix}$$

Übertragung Punkt f

$$Z_{e\_f\_re} := A_f \cdot Z_{e\_f\_li} + L_f = \begin{pmatrix} 58.667 \\ 4 \\ 14 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

Übertragung Abschnitt 6

$$Z_{e\_g\_li} := A_6 \cdot Z_{e\_f\_re} + L_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -24 \\ -0 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

DLT-Feld c-e

$$X_c := Z_{e\_oben}^{-1} \cdot \left(u_{e\_re} - L_{e\_oben}\right) = \begin{pmatrix} -8 \\ 11.5 \end{pmatrix}$$

$$Z_{e\_c} := Z_{gelenk} \cdot X_c = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \\ 11.5 \end{pmatrix} \qquad u_{c\_re} := \begin{pmatrix} Z_{e\_c_1} \\ Z_{e\_c_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Punkt c - Übertragung des Anfangsvektors über die Feder, die das linke DLT-Feld ersetzt:

$$Z_{e\_c\_re} := A_c \cdot Z_{e\_c} + L_c = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dies sind die nun bekannten Zustandsgrößen am Anfang des Feldes c-e

Übertragung Abschnitt 3 $Z_{e\_d\_li} := A_3 \cdot Z_{e\_c\_re} + L_3 = \begin{pmatrix} 10.667 \\ -7.816 \times 10^{-14} \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

Übertragung Punkt d $Z_{e\_d\_re} := A_d \cdot Z_{e\_d\_li} + L_d = \begin{pmatrix} 10.667 \\ -7.816 \times 10^{-14} \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$

Übertragung Abschnitt 4 $Z_{e\_e\_li} := A_4 \cdot Z_{e\_d\_re} + L_4 = \begin{pmatrix} -0 \\ 8 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$

DLT-Feld a-c

$$X_a := Z_{c\_oben}^{-1} \cdot \left(u_{c\_re} - L_{c\_oben}\right) = \begin{pmatrix} 24 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

$Z_{e\_a} := Z_{gelenk} \cdot X_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \\ 3.5 \end{pmatrix}$ *Dies sind die nun bekannten Zustandsgrößen am Anfang des Feldes a-c*

Übertragung Abschnitt 1 $Z_{e\_b\_li} := A_1 \cdot Z_{e\_a} + L_1 = \begin{pmatrix} 58.667 \\ -4 \\ 14 \\ 3.5 \end{pmatrix}$

Übertragung Punkt b $Z_{e\_b\_re} := A_b \cdot Z_{e\_b\_li} + L_{b\_re} = \begin{pmatrix} 58.667 \\ -4 \\ 14 \\ -6.5 \end{pmatrix}$

Übertragung Abschnitt 2 $Z_{e\_c\_li} := A_2 \cdot Z_{e\_b\_re} + L_2 = \begin{pmatrix} -0 \\ -8 \\ -12 \\ -6.5 \end{pmatrix}$

Vergleichsrechnung nach Schneider/Bautabellen 25. Auflage Seite 4.8

$M_{Feld\_ac} := 0.175 \cdot 10 \cdot 8 = 14$ $M_{Feld\_ce} := 0.1 \cdot 10 \cdot 8 = 8$ $M_{Feld\_eg} := M_{Feld\_ac} = 14$

$M_c := 0.15 \cdot 10 \cdot 8 = 12$ $M_e := M_c = 12$

$A := 0.35 \cdot 10 = 3.5$ $Qbl := -0.65 \cdot 10 = -6.5$ $Q_{br} := 0.5 \cdot 10 = 5$